轴子光子存在时广义相对论的修正探索

2022年12月02日

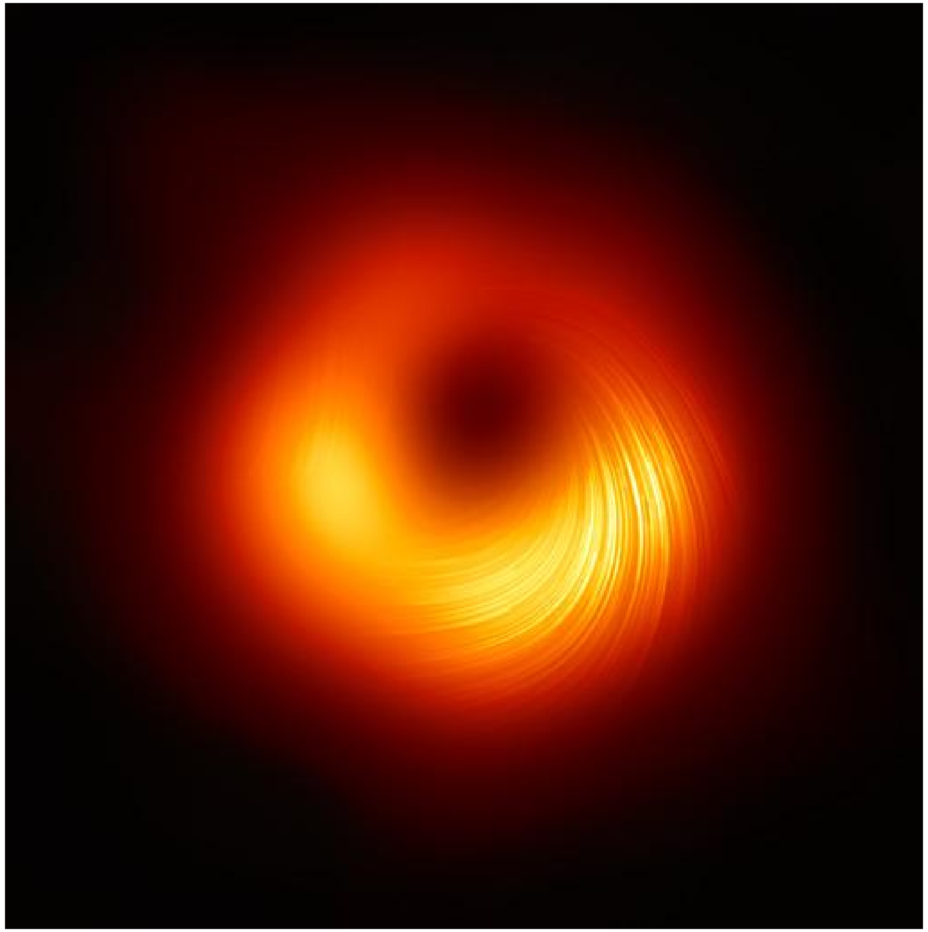
上海科技大学 中国科学院上海天文台

王玗

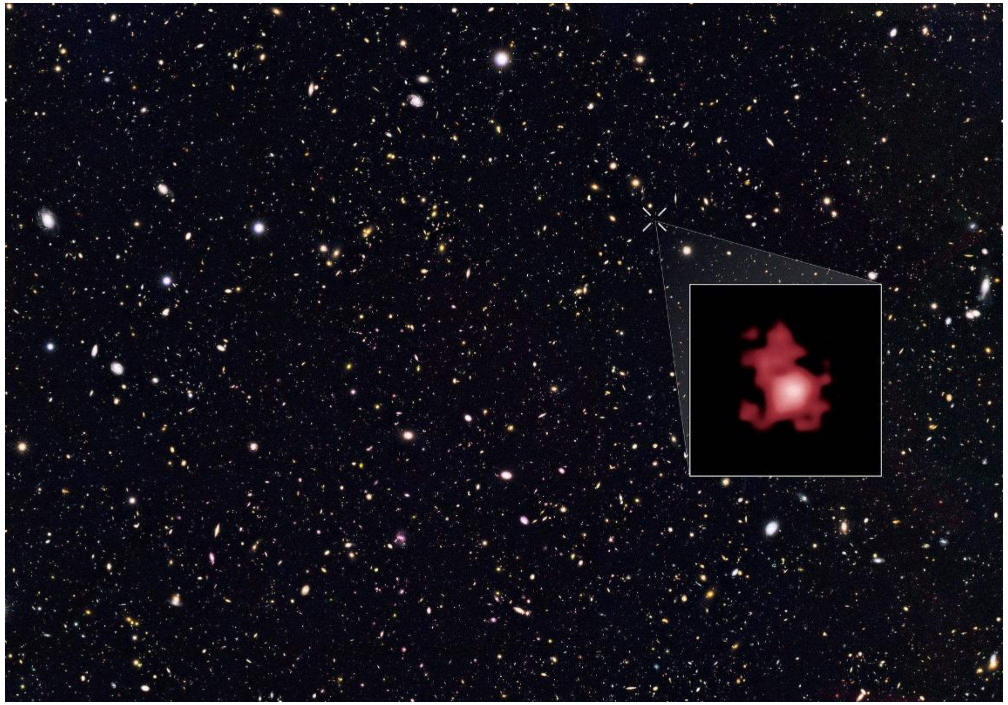
内容提纲

- 背景介绍
- 初步结果
- 后续计划

背景介绍



https://eventhorizontelescope.org/



GLASS-z13
https://www.popsci.com/science/big-bang-galaxy-james-webb-space-telescope/

背景介绍

Yifan Chen, Jing Shu, Xiao Xue et al. Probing Axions with Event Horizon Telescope Polarimetric Measurements. Phys. Rev. Lett. (2020) 124, 061102

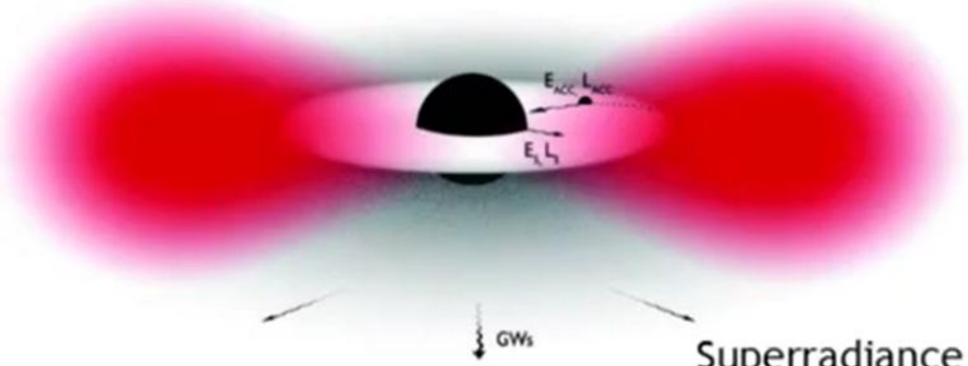
Chen等人[1]认为通过事件视界望远镜(EHT)可以用来探测超轻玻色子粒子的存在，如轴子。这些粒子可以通过超辐射机制聚集在一个旋转的黑洞周围，形成一个轴子云。轴子与光子耦合会有双折射效应，既电磁波在轴子场中传播时，电磁波的偏振面会旋转，通过射电波的偏振测量可以探测轴子。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{a\gamma}aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla^{\mu}a\nabla_{\mu}a - V(a),$$

$$\Box A_{\pm} = \pm 2ig_{a\gamma}[\partial_z a\dot{A}_{\pm} - \dot{a}\partial_z A_{\pm}],$$

$$\begin{aligned} A_{\pm}(t,z) = A_{\pm}(t',z')\exp\{&-i\omega_{\gamma}(t-t') + i\omega_{\gamma}(z-z') \\ &\pm ig_{a\gamma}[a(t,z) - a(t',z')]\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\Theta &= g_{a\gamma}\Delta a(t_{\mathrm{obs}}, \mathbf{x}_{\mathrm{obs}}; t_{\mathrm{emit}}, \mathbf{x}_{\mathrm{emit}}) \\ &= g_{a\gamma}\int_{\mathrm{emit}}^{\mathrm{obs}} ds n^{\mu}\partial_{\mu}a \\ &= g_{a\gamma}[a(t_{\mathrm{obs}}, \mathbf{x}_{\mathrm{obs}}) - a(t_{\mathrm{emit}}, \mathbf{x}_{\mathrm{emit}})]. \end{aligned}$$



Superradiance condition

$$\omega < \omega_c = \frac{a_J m}{2r_+}$$

https://www.koushare.com/video/videodetail/34360

背景介绍

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

$$Q^2 = 4\pi G\omega\epsilon^2.$$

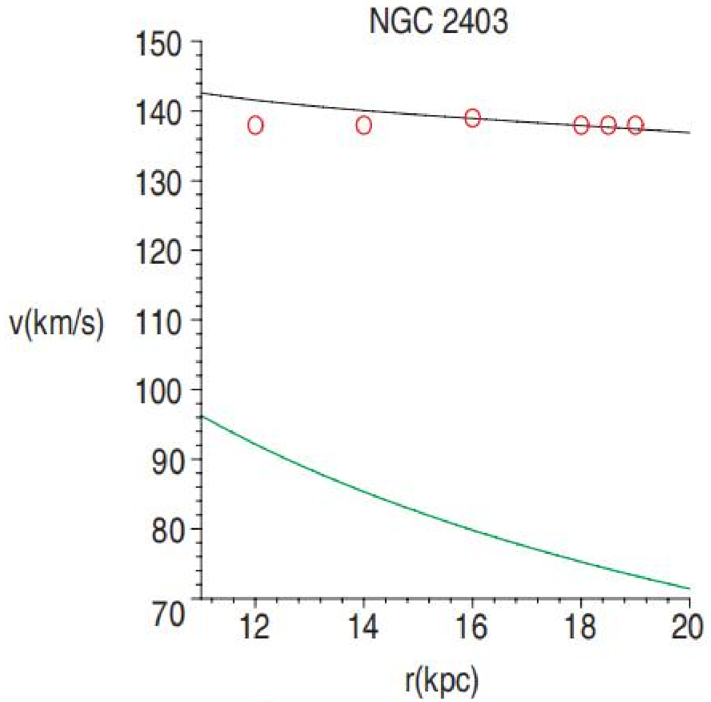
Moffat[2]提出标量-张量-矢量引力理论(STVG)，得到修正后的引力常数，能够对没有暗物质的星系旋转曲线、星系团和宇宙学进行解释[3]。

$$S = S_{\rm Grav} + S_\phi + S_S + S_M,$$

$$S_{\rm Grav} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{1}{G}(R + 2\Lambda)\right],$$

$$S_\phi = -\int d^4x\,\sqrt{-g}[\omega(\tfrac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + V(\phi))],$$

$$S_S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{1}{G^3}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu G\nabla_\nu G - V(G)\right) + \frac{1}{G}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\omega\nabla_\nu\omega - V(\omega)\right) + \frac{1}{\mu^2 G}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\mu\nabla_\nu\mu - V(\mu)\right)\right].$$



$$S_F = \int d^4x\,\sqrt{-g}(\tfrac{1}{12}F_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu\rho} - \tfrac{1}{4}\mu^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}),$$

$$a(r) = -\frac{G_0 M}{r^2}\left\{1 + \sqrt{\frac{M_0}{M}}\left[1 - \exp(-r/r_0)\left(1 + \frac{r}{r_0}\right)\right]\right\}.$$

$$v_c = \sqrt{\frac{G_0 \mathcal{M}(r)}{r}}\left\{1 + \sqrt{\frac{M_0}{M}}\left[1 - \exp(-r/r_0)\left(1 + \frac{r}{r_0}\right)\right]\right\}^{1/2}.$$

初步结果

结合Moffat[2]和Chen[1]等人的工作，假设在星系内部中心超大质量周围的作用量形式如下：

$$S = S_{grav} + S_{coupl}$$

$$S_{grav} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x \frac{\sqrt{-g}(R + 2\Lambda)}{G}$$

$$S_{coupl} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{h}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\omega a F^{\alpha\beta}(* F)_{\alpha\beta} + \mathrm{k}(\frac{1}{2}\nabla^{\mu}a\nabla_{\mu}a - V(a))\right]$$

其中G是引力系数，随时空变化，ω是轴子-电磁场耦合常数，h是时空与电磁场耦合系数，在本文中取h=1，a是轴子场，$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$是电磁场张量。

初步结果

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$

$$Q_{\mu\nu} = G\left(g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\frac{1}{G} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\frac{1}{G}\right)$$

利用能动张量：

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_{coupl}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

可以得到修正GR场方程：

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{h}{4}g_{\mu\nu}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta} - hF_{\mu}^{\alpha}F_{\alpha\nu} - \omega a g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}(*F)_{\alpha\beta} + 4\omega a F_{\nu}{}^{\sigma}(*F)_{\mu\sigma} + k(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}a\nabla_{\alpha}a - \nabla_{\mu}a\nabla_{\nu}a - g_{\mu\nu}V(a) + 2\frac{\partial V(a)}{\partial g^{\mu\nu}})$$

根据量子场论，能量和动量算符$\propto a_{\mu}^{+}a_{\mu}$，其中$a_{\mu}^{+}$和$a_{\mu}$是某种粒子的升降算符，而能量和动量是能动张量的$T_{0\mu}$分量，爱因斯坦场方程的等号左边与度规有关，可以看出度规的量子化与能动张量中含有粒子的种类有关，这种情况会使方程更复杂。

初步结果

轴子场和光子场的运动方程为：

$$\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}a+\frac{1}{2}\omega F^{\alpha\beta}(*F)_{\alpha\beta}+\frac{\partial V(a)}{\partial a}=0$$

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu}+2\omega a\nabla_{\nu}(*F)^{\mu\nu}+2\omega(*F)^{\mu\nu}\nabla_{\nu}a=0$$

可看出引进轴子会对麦克斯韦方程有修正。

静态球对称场的线元如下(施瓦西类型，带点球型可用)：

$$ds^2=\mathrm{e}^{-2\alpha(r)}dt^2-e^{2\beta(r)}dr^2-r^2(d\theta^2+sin^2\theta d\phi^2)$$

在Moffat[2]的工作中，通过对(11)式做$\nabla_{\nu}B^{\mu\nu}=0$的近似处理，取零阶近似项，得到的度规结果类似为带点黑洞解，只是电荷项变成与G相关项。

初步结果

轴子和电磁场耦合可以看成微扰，则利用迭代法可得：

$$G^{(0)\mu\nu} = 8\pi \mathrm{G} T^{(0)\mu\nu}$$

$$\nabla_\nu F^{(0)\mu\nu} = 0$$

这时零阶度规张量为：

$$-g_{tt}^{(0)} = \left(g_{rr}^{(0)}\right)^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2+P^2}{r^2}$$

$$g_{\theta\theta}^{(0)} = r^2, g_{\phi\phi}^{(0)} = r^2 sin^2\theta$$

$$(*F)^{(0)}{}_{tr} = \frac{e^{\alpha+\beta}}{r^2 sin\theta} F_{\theta\phi}, (*F)^{(0)}{}_{\theta\phi}$$

$$= -e^{-(\alpha+\beta)} r^2 sin\theta F_{tr}$$

$$F_{tr}^{(0)}(r) = \frac{Q}{4\pi}\frac{e^{\alpha+\beta}}{r^2}, F_{\theta\phi}^{(0)} = \frac{P}{4\pi} sin\theta$$

其中Q和P分别是电荷和磁荷，由$F^{\alpha\beta}(*F)_{\alpha\beta} \propto \vec{E}\cdot\vec{B}$，可知电荷磁荷都要存在。继续利用迭代

$$\nabla_\nu F^{(1)\mu\nu} + 2\omega a^{(0)} \nabla_\nu (*F)^{(0)\mu\nu} + 2\omega (*F)^{(0)\mu\nu} \nabla_\nu a^{(0)} = 0$$

若a满足$a \sim \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \dots$，$F_{tr} \sim \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \dots$，代入上式可满足条件。通过$a \sim \frac{1}{r}$可知在黑洞附近处轴子更多一些，不需要超辐射过程也可以形成轴子云。

初步结果

对轴子运动方程取零阶近似，并取$V(a) \approx \frac{1}{2}m^2a^2$,，可得

$$\nabla^\mu \nabla_\mu a + m^2 a = 0$$

这时a零阶可以取成：

$$a^{(0)} = \beta \frac{e^{-mr}}{r}$$

与前文猜测相符合。

初步结果

若将光子场替换成自旋为1的有质量场，作用量及运动方程改写为：

$$S_{coupl} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{h}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\omega a B^{\alpha\beta}(\mathrm{B})_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\nabla^{\mu}a\nabla_{\mu}a - V(a) + \mathrm{V}(A^{\mu})\right]$$

$$\nabla_{\nu}B^{\mu\nu} + 2\omega a\nabla_{\nu}(*\,B)^{\mu\nu} + 2\omega(*\,B)^{\mu\nu}\nabla_{\nu}a + \frac{\partial V(A^{\mu})}{\partial A^{\mu}} = 0$$

这时度规零阶可以取成：

$$-g_{tt}^{(0)} = \left(g_{rr}^{(0)}\right)^{-1} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$$

$$g_{\theta\theta}^{(0)} = r^2, g_{\phi\phi}^{(0)} = r^2 sin^2\theta$$

这时的Q与Moffat[2] 中结果相同。继续利用迭代

$$\nabla_{\nu}B^{(0)\mu\nu} + 2\omega a^{(0)}\nabla_{\nu}(B)^{(1)\mu\nu} + 2\omega(B)^{(1)\mu\nu}\nabla_{\nu}a^{(0)} = 0$$

若a满足$a\sim\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\dots$，$B_{tr}\sim\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^3}\dots$，代入上式可满足条件。通过$a\sim\frac{1}{r}$可知在黑洞附近处轴子更多一些，不需要超辐射过程也可以形成轴子云。

后续计划：带自旋黑洞

由于真实黑洞更多是带有自旋，这是应使用柱坐标线元。柱对称线元如下(Kerr型，Kerr-Newman型)：

$$ds^2 = A(r,\theta)dt^2 - B(r,\theta)dr^2 - C(r,\theta)d\theta^2 - D(r,\theta)sin^2\theta d\phi^2 - B(r,\theta)dtd\phi$$

将线元与场方程，轴子a和A_ν对应的欧拉拉格朗日方程，以及能量守恒定律一起使用，可以得到度规与G, a等的关系。考虑Kerr型度规有助于我们研究星系中心超大质量黑洞附近区的一些性质。在后续工作中，本人会尝试一些方法来完善这方面的工作。

试探粒子的作用量由下式给出：

$$S_{TP} =- m\int d\tau - \lambda\int d\tau A_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

上式τ是沿着试探粒子世界线的固有时，m和λ分别是试探粒子的质量、探测粒子与4矢势的耦合常数。若试探粒子为带电粒子，λ为试探粒子所带电荷量。由于超大质量黑洞周围存在大量的等离子体，我们考虑$\lambda = e$。由稳态条件$\delta S_{TP}/\delta x^\mu$=0，可得试探粒子GR修正测地线方程：

$$m\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) = \lambda F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

并结合度规、Killing矢量场并对G进行一些近似处理，可得出G的近似形式。并且对测地线方程取一定限制可以得到粒子进动性质和光线偏折。

后续计划：宇宙学

考虑GR修正在宇宙学的应用，我们采用均用各向同性背景几何，线元形式如下：

$$ds^2 = dt^2 - a^2\left(d\theta^2 \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)$$

定义理想流体的能动量方程为：

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

$$p = p_M + p_A + p_a, \rho = \rho_M + \rho_A + \rho_a$$

其中，ρ_i和p_i分别代表物质、电磁场和轴子的密度和压力。通过修正GR场方程可以得到新的Friedmann方程，会与G(x)有关。将得到G(x)带入到Friedmann方程会得到修正后的哈勃参数等一些与宇宙学相关物理量。

准正交模式引力微扰被认为是最重要的微扰识别方法，因为它能够直接识别出黑洞及其引力辐射[4]。本人计划通过该方法计算修正GR的引力辐射。

后续计划：量子化

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$
$$Q_{\mu\nu} = G\left(g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\frac{1}{G} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\frac{1}{G}\right)$$

利用能动张量：

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_{coupl}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

可以得到修正GR场方程：

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{h}{4}g_{\mu\nu}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta} - hF^{\alpha}_{\mu}F_{\alpha\nu} - \omega a g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}(*F)_{\alpha\beta} + 4\omega a F_{\nu}{}^{\sigma}(*F)_{\mu\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}a\nabla_{\alpha}a - \nabla_{\mu}a\nabla_{\nu}a - g_{\mu\nu}V(a) + 2\frac{\partial V(a)}{\partial g^{\mu\nu}}$$

根据量子场论，能量和动量算符$\propto a_{\mu}^{+}a_{\mu}$，其中$a_{\mu}^{+}$和$a_{\mu}$是某种粒子的升降算符，而能量和动量是能动张量的$T_{0\mu}$分量，爱因斯坦场方程的等号左边与度规有关，可以看出度规的量子化与能动张量中含有粒子的种类有关。

参考文献

- [1] Yifan Chen, Jing Shu, Xiao Xue et al. Probing Axions with Event Horizon Telescope Polarimetric Measurements. Phys. Rev. Lett. (2020) 124, 061102
- [2] John Moffat. Scalar–tensor–vector gravity theory. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. (2006) 03:004
- [3] J. R. Brownstein and J. W. Moffat. Galaxy Rotation Curves without Nonbaryonic Dark Matter.The Astrophysical Journal, (2006) 636:721
- [4] Luciano Manfredi, Jonas Mureika, John Moffat. Quasinormal modes of modified gravity (MOG) black holes. Physics Letters (2018) B 779:492

谢谢！