学校代码 10126　　　　　　　　学号 0161121383

分 类 号 0413.3　　　　　　　　密级 公开

本科毕业论文（设计）

QCD 求和规则中色散关系的研究

学院、系 物理科学与技术学院

专业名称 电子科学与技术

年　　级 2016 级

学生姓名 秦洋

指导教师 赵振兴

2020 年 5 月 18 日

摘要

量子色动力学（QCD）是粒子物理标准模型的重要组成部分，它与量子电动力学（QED）既有很多共同点，也有一些重要的差别。在 QED 中，电子是最主要的粒子，它们不断地发射或吸收光子，从而令我们看到了物质世界在电磁相互作用下表现出的很多规律和现象，而在 QCD 中，夸克就像 QED 中的电子，成为了我们的“主角”，它同样发射或吸收着名为胶子的规范粒子，为我们展现着宇宙中另一种基础的场力——强相互作用的魅力。本文的第一章为绪论部分，第二章将分别介绍标准模型的基本粒子、基本相互作用以及味物理学研究的主要对象。第三章将正式介绍 QCD 的重要工具，QCD 求和规则方法的具体内容。第四章具体研究一个单圈图，分别通过直接计算和计算色散关系谱密度两种方式对 QCD 求和规则中十分重要的双重色散关系进行验证。最后简单总结一下本文主要的结果。

关键词：夸克，QCD 求和规则，色散关系

Abstract

Research on the sum rule and dispersion relation of QCD

Author：Qin Yang

Tutor：Zhao Zhenxing

Quantum chromodynamics (QCD) is an important part of the standard model of particle physics. It has many similarities and some important differences with QED. In QED, electrons are the most important particles. They continuously emit or absorb photons, so that we can see many laws and phenomena in the material world under the electromagnetic interaction. In QCD, quarks, like electrons in QED, become our "protagonists". They also emit or absorb standard particles called gluons, showing us another kind of universe The basic field force -- the charm of strong interaction. The first chapter is the introduction part. The second chapter will introduce the basic particles, basic interaction and the main object of taste physics research of the standard model. The third chapter will formally introduce the important tools of QCD, and the specific content of QCD sum rule method. In Chapter 4, we study a single loop graph, and verify the double dispersion relation which is very important in the QCD summation rule by directly calculating and calculating the dispersion relation spectral density. Finally, the main results of this paper are briefly summarized.

Key words: quark, QCD sum rule, dispersion relation

目录

第一章、绪论

在 20 世纪初期,物理学正处于一个蓬勃发展的历史时期，一大批惊才绝艳的物理学家在物理学史上接连登台，就是这段时间，在薛定谔、玻尔、海森堡、普朗克、爱因斯坦、费米、泡利、德布罗意等一大批伟大的物理学家的研究和探索中，一门奠定现代物理学发展方向的理论——量子力学诞生了，随后原本的物理学格局也被彻底改变了，这是人类对微观尺度不断探索带来的成果。随着一百多年来的发展，现代物理学对量子力学不断进行着完善和拓展，如今人们对于微观世界的研究已经取得了很大的成果。在粒子物理学，又被称为高能物理学领域以及凝聚态物质物理学领域中，量子场论扮演着十分重要的角色，引领着科研工作者们向着更深层次的宇宙奥秘继续探索。

量子色动力学，英文全称为 Quantum Chromodynamics，我们通常简称为 QCD，是在上世纪七十年代由盖尔曼等物理学家创立的描述强相互作用的一种规范性的理论，其主要内容是用来描述显微镜下都无法看到的微观世界的基本粒子中的强子粒子的结构和不同或同种强子之间的强相互作用现象。强作用理论也是粒子物理学的许多分支和研究领域中最复杂的问题之一，在 π 介子刚被发现的时候，人们假设它是 strong interaction，也就是强相互作用的传递者，按照量子电动力学即 QED 的模式构造 strong interaction，通常也叫强力，然而不久就发现用这样的方法甚至不能使理论与实验的结果一致。随后，在不断的研究中发现，强子能量尺度达到近似任意大，或距离尺度达到近似任意小的情况下，它们可以被认为是相对自由的，这种现象人们就称之为粒子的渐进自由。然而我们到目前为止，都没有能够发现相对自由的胶子和夸克，所以我们就可以认为，强子这种粒子较为特殊，它具有相对复杂的内部结构，用来组成强子的各粒子间的相互作用有可能趋近于零，而这种现象的条件是其间距远远小于强子粒子的直径尺度，这样的话，在这些粒子的间距逐渐增加，并且渐渐靠近强子粒子的微观尺度时，其自身所受到的相互作用力会逐渐增强，这就形成了一道无形的场力墙，使被束缚的粒子不会从强子这个大的粒子中逃逸，这就称之为强子的色禁闭。从这样的理论出发，我们以夸克的不同的色自由度为基础，就建立起了 Quantum Chromodynamics，量子色动力学，简称 QCD[1]。

QCD 真空，是我们了解强相互作用力的原理和规律的一个重要的内容，QCD 真空的理论基础是夸克和规范场理论。在低能量的区域，夸克或胶子是禁闭的状态，这是因

为强子粒子的色禁闭，研究的基础粒子变成强子，微扰论对强子的质量和衰变的方式是无法计算的。在高能量的区域，夸克和胶子由于渐进自由可以被预测，此时就可以通过微扰论进行计算了。而在两个区域之间，还存在一个区域，称为中能区，QCD 求和规则，就是利用色散关系来连接高能区和低能区两个区域的。所以，它也为我们研究强作用动力学提供了一个有力的框架。QCD 求和规则在研究形状因子时，需要用到双重色散关系。后文将在 QCD 求和规则下对色散关系进行研究，并通过对一个三点图的计算来验证色散关系的成立。

第二章、标准模型简介

2.1 标准模型的基本粒子

粒子物理的标准模型是对物质世界基本粒子之间的相互作用现象进行描述和探究的理论，除了引力之外，电磁力，弱力，强力都可以由基本粒子传递。目前已知的基本粒子一共有六十一种，包括三十六种夸克，十二种轻子，十二种玻色子，以及希格斯粒子，其中夸克和轻子是主要研究的对象，也是构成物质世界最主要的成员[2]。而玻色子中包含我们所熟悉的光子，它可以用来传递来自电子粒子所携带的电磁力,分别携带一个正电荷和一个负电荷的两种 W 玻色子和不带电的中性的 Z 玻色子,它们可以传递放射性物质中携带的弱核力以及八种静止质量为零，并且自旋为 1 的胶子，它们与传递电磁力的光子有类似之处，可以传递夸克粒子中携带的强力。希格斯粒子则是近些年人们在高能粒子对撞实验中发现的基本粒子，由于这种粒子的获得只能通过超级粒子加速器才有可能产生，所以就连其存在也是 2013 年才被证实的。

2.1.1 夸克

夸克是一种与强相互作用相关的基本粒子，也是构成物质最基本的单元。夸克一共有六种，也可以说是六种味，它们分别名为上（up）、下（down）、粲（charm）、奇（strange）、顶（top）、底（bottom），我们上面提到的每一种或每一味的夸克都具有一种与其相对应的反粒子，也就是反夸克[3]。其他四种重的夸克自然情况下会迅速衰变为上夸克或下夸克，这是因为上夸克和下夸克是质量最低最稳定的。多个夸克之间相互组合，就可以结合成为更大尺度的强子，所以强子也可以说是一种复合粒子。由夸克组成的粒子种类有很多，比如质子和中子，质子写作 uud，意思是它由两个上夸克和一个下夸克构成，中子则可以写作 udd，意思是它通过两个下夸克以及一个上夸克结合而成。夸克的味的形成受到弱相互作用的影响，每一味夸克都有三种色，这样的分类与强相互作用有关。夸克是我们目前已知的唯一一种能经受全部四种基本的相互作用力的基本粒子。

2.1.2 轻子

轻子是一种不参与强相互作用的粒子，它也和夸克一样作为组成物质的基本粒子。其种类有六种，同样可称六种味，分别是电子（electron）、μ 子(muon)、τ 粒子(tau)以及它们的中微子，写作ν_e(electron neutrino)、ν_μ(muon neutrino)、ν_τ(tau neutrino)，它们总是成对出现，每一对包括一种轻子和对应的中微子。它们的质量要相差几个数量级，电子的质量是 0.51MeV，μ 子的质量是 105.66MeV，τ 粒子则是 1776.99MeV，并且这六味轻子也是存在自身的反粒子的。它们的正粒子带有一个单位的负电荷，反粒子带有一个单位的正电荷，三种中微子和其反粒子则是中性粒子，不带电。因此轻子只受到电磁力和弱力作用，并且轻子的产生和湮灭总是与它的反粒子一起发生，所以轻子的粒子和反粒子数目永远相同，这也称为轻子数守恒。

2.2 标准模型中的相互作用

我们宇宙中的相互作用一共有四种，分别是我们最熟悉的万有引力，也就是有质量的物质都具有的吸引力，称为重力相互作用，自工业革命以来就为人类社会做出了无法比拟的重要作用的电磁力，称为电磁相互作用，还有作用于我们肉眼不可见的微观世界粒子之间和内部的两种核力，弱核力和强力，也称为弱相互作用和强相互作用。这四种力常常被科学界称之为宇宙的四种基本作用力，我们肉眼能见的或不能见的所有的物理现象都离不开这些力的作用。其中除去我们赖以生存的万有引力，因为其强度与质量相关，所以在微观粒子中作用几乎可以忽略不计以外，另外三个都是与微观的世界有关的力，所以它们也和量子力学的理论研究密不可分。

2.2.1 电磁相互作用

电磁相互作用简称电磁作用，是带电粒子在电磁场中受到磁场的影响从而状态发生变化以及带电粒子之间通过电磁场进行传递的相互作用。这是一种长程的相互作用，意味着作用强度随着距离增加逐渐减小，从量子场论的观点来看，电磁相互作用可以认为是带电粒子拥有的光子在力的作用下转移的现象[4]，这也是量子电动力学（QED）的基础理论。

2.2.2 弱相互作用

弱相互作用通常又称之为弱力或者是弱核力，在粒子物理的标准模型中表明，通常由两种带电 W 玻色子和中性的 Z 玻色子的发射与吸收来进行传递的弱力，是一种作用在粒子内部的核力，可以引起例如次原子粒子（也就是比原子更小的粒子）的放射性衰变等现象。由于 W 玻色子和 Z 玻色子的质量要比质子大一百倍以上，而重的粒子的性质一般不稳定，所以由弱相互作用所表现出来的作用范围非常短，属于短程力。由于这种力的强度要比电磁力和强力弱几个数量级，因此称为弱力，也叫弱相互作用。

2.2.3 强相互作用

强相互作用也被称为强力，是各自作用范围内相对强度最高的一种力，强相互作用的研究最早是质子和中子间的核力，人们发现这种力能将原子核在原子中牢牢的固定，而不是像电子一样到处游移，从二十世纪四十年代从宇宙射线中发现 π 介子以来，有上百种粒子被发现能够参与强相互作用。实验中所检测到的强相互作用的强度表现得很高，比电磁相互作用还要高两到三个数量级，他与弱力一样是短程力，但是力程要更长一点，组成原子核的各个粒子之间的距离就是在强相互作用的范围之内的。量子色动力学（QCD），是目前研究的一个规范性的理论，在研究强相互作用方面，在强相互作用下组合而成的粒子，能够在 QCD 框架下得到统一的解释[5]。在量子电动力学中，光子作为承载电磁力的基本单元，通过观测光子的转移规律就可以研究电磁力的作用，而量子色动力学中，也有一种被称为胶子的自旋为 1 的粒子，它可以被夸克吸收或释放，间接地传递强子之间的强相互作用力。

2.3 味物理研究的主要对象

2.3.1 重子

重子是一种费米子，是强子的一种，它通常由三个夸克构成，反重子则通常是由三个反夸克构成的。重子中最基本的就是质子和中子，它们只由上下夸克构成，是最轻的，其他重子还包括 Λ 粒子，Σ 粒子，Ξ 粒子，Ω 粒子等，质量比前者要重很多，被统称为超子，所有的这些重子最终都要衰变为质子，这也说明了质子是最稳定的一种重子。

2.3.2 介子

介子是一种玻色子，由一对正反夸克构成。介子的发现是从强相互作用的研究开始的，π介子被类比为电磁场中的光子，可以在核子之间进行传递。与重子不同的是，所有的介子都是不稳定的，存在一段时间后就会转变为其它粒子。

第三章、QCD 求和规则简介

3.1 算符乘积展开

由于 QCD 中渐进自由的性质，低能区无法进行微扰展开，需要用其他方法得到结果，算符乘积展开就是其中一种。这是分析强子的基本工具，它将短距离和长距离的效应分开处理，短距离效应用微扰展开，长距离效应就用算符来表示。QCD 求和规则就是以算符乘积展开为基础的，引入具有解析性质的关联函数，得到含强子参数的方程，再结合实验观测量就可以计算这些参数[6]。

QCD 求和规则就是把关联函数$\Pi(q^2)$在欧式区域$(q^2<0)$展开。微扰项作为首项，其余项都是非微扰的夸克和胶子的期待值，这些凝聚项可以用唯象方法得到。对于深度欧式区域$(-q^2>1GeV^2)$，我们可以把展开的级数截断，得到的结果依然精确。关联函数$\Pi(q^2)$可以通过色散关系的积分和谱密度联系起来。在高能区，谱线由于渐进自由的特性会趋近于微扰论结果，在低能区，则会出现共振峰[7]。接着，我们把由算符乘积展开得到的关联函数与色散关系下由谱密度得到的关联函数一起分析，我们就可以把谱密度中的强子质量和衰变宽度等待计算值用 QCD 的凝聚态和粒子基本参数表示。

要运用 QCD 求和规则计算，第一步就是对研究对象进行算符乘积展开(Operator Product Expansion，简称 OPE)，首先，任意的场或复合算符的乘积$A(x)B(y)$可以用局域算符O展开：

$$A(x)B(y)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-y)O_n(\frac{x+y}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-y)O_n(y) \tag{3-1-1}$$

当$y\to x$时，$\mathrm{C}_n(x-y)$具有奇异性，称为 Wilson 系数，并且此时$A(x)B(y)$的奇异性全部包含在$\mathrm{C}_n(x-y)$之中，系数之后的$\mathrm{O_n}$部分不包含奇异性。而 Wilson 系数又可以由算符的维数来决定：

$$\lim_{\mathrm{y}\to\mathrm{x}}\mathrm{C_n}(\mathrm{x}-\mathrm{y})=(x-y)^{\gamma_n} \tag{3-1-2}$$

其中$\gamma_{\mathrm{n}}=d_{o_n}-d_A-d_B$，这里 d 指的是对应算符的量纲，由此我们可以知道$\mathrm{O_n}$的量纲高，则 Wilson 系数可以更快地趋于 0，也就意味着它的奇异性越小，所以算符$\mathrm{O_0}$那一项具

有最低的维数，其系数也就有着最高的奇异性，所以算符 O_0 就作为 0 维的单位算符。因为需要通过将算符乘积展开的级数从某一项截断来避免高维算符的影响，我们希望 $\left|q^2\right| \sim \infty$，所以通常直接在 $-q^2 \to \infty$ 的深度欧式区域进行算符乘积展开。

3.2 关联函数

关联函数用来表征一个复合粒子从一点到另一点的概率，通过某一个粒子的关联函数，我们可以计算该粒子的包括质量在内的很多性质和参数，所以如何计算关联函数就是一个关键的问题。

在 QCD 求和规则中，关联函数中的乘积项先用算符乘积展开处理：

$$\Pi(q) = i\int d^4 x e^{iq\cdot x} T[J_\Gamma(x) J_\Gamma^*(0)] = \sum_n C_n(q) O_n \tag{3-2-1}$$

式(3-2-1)中，$C_n(q)$ 这部分就是 Wilson 系数，算符 O_n 按照维数依次排列，排除 0 维单位算符，其他维算符都用夸克和胶子场的算符构建。

算符乘积展开的应用实际上就是将近距离的高能区域和远距离的低能区域分开计算，其中高能区由于 QCD 的渐进自由的性质，可以把性质包括在 Wilson 系数中，而低能区反映夸克禁闭的信息则被参数化为算符的期望，也就是真空凝聚，这些凝聚参数反映了真空非微扰的性质。

得到关联函数之后，还要将计算的结果用色散关系匹配到可观测的物理量上，这是为了将基于 QCD 得到的关联函数与观测的参数联系起来。

3.3 色散关系

在实验中由于夸克禁闭，通常是无法直接观测到夸克和胶子的，只有通过观测处于色单态的强子才能获取。色散关系就是将理论计算和唯象观测衔接起来的“桥梁”。先从关联函数得到唯象谱，再用色散关系将算符乘积展开与唯象谱中的强子可观测量衔接，这样就把理论分析与实验观测结合起来了。

根据柯西公式，解析函数 $\Pi(q^2)$ 可以表示为：

$$
\begin{aligned}
\Pi(q^2) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz \frac{\Pi(z)}{z-q^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} dz \frac{\Pi(z)}{z-q^2} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^R dz \frac{\Pi(z+i\varepsilon)-\Pi(z-i\varepsilon)}{z-q^2}
\end{aligned} \tag{3-3-1}
$$

令围道积分的围道半径 $R\to\infty$，上式第一项为 0，只剩下 $q^2>0$ 的积分，根据施瓦茨反射原理，当 $q^2>0$ 时，解析函数 $\Pi(q^2)$ 具有这样的性质：

$$
\Pi(q^2+i\varepsilon)-\Pi(q^2-i\varepsilon)=2i\,\mathrm{Im}\,\Pi(q^2) \tag{3-3-2}
$$

于是就可以得到色散关系：

$$
\Pi(q^2)=\frac{1}{\pi}\int_{s_{\min}}^{\infty} ds \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{s-q^2-i\varepsilon} \tag{3-3-3}
$$

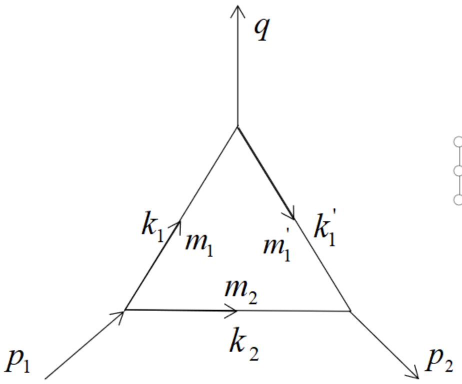
其中 $\mathrm{Im}\,\Pi(s)$ 称为谱密度，积分下限 $s_{\min}$ 是粒子谱图中割线的左边界，对轻夸克来说，$s_{\min}=0$，而对于含有单个重夸克的系统来说，$s_{\min}=m_h^2$，m_h 是对应夸克的质量。接下来，我们将由计算得到的关联函数和谱密度结合，就得到了一个可以用来表示求和规则的表达式：

$$
\Pi^{\mathrm{OPE}}(q^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} ds \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{s-q^2-i\varepsilon} \tag{3-3-4}
$$

第四章、双重色散关系的验证

计算介子和重子弱衰变的形状因子需要借助双重色散关系。本章将以最简单的单圈三角图为例，从数值上验证色散关系的成立。

4.1 直接计算关联函数



$$(p_1 - p_2)^2 = q^2$$

图 4.1

我们以图 4.1 为例进行计算，这个三点图的积分用 Π 来表示[8]，可以表示为：

$$\Pi = \Pi(p_1, p_2, q, k_1, k_2, k_1^{'}, m_1, m_2, m_1^{'}) = \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{A_1 A_2 A_3} \tag{4-1-1}$$

$A_1 A_2 A_3$ 是传播子：

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1^{\ 2} - m_1^{\ 2} - i\xi \\ A_2 &= k_2^{\ 2} - m_2^{\ 2} - i\xi \\ A_3 &= k_1^{'2} - m_1^{'2} - i\xi \end{aligned} \tag{4-1-2}$$

其中：$k_1 = p_1 - k_2, k_1^{'} = p_2 - k_2$。

$$\begin{aligned} \Pi &= \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_1^{\ 2} - m_1^{\ 2})(k_2^{\ 2} - m_2^{\ 2})(k_1^{'2} - m_1^{'2})} \\ &= \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_1 - k_2)^2 - m_1^{\ 2}](k_2^{\ 2} - m_2^{\ 2})[(p_2 - k_2)^2 - m_1^{'2}]} \end{aligned} \tag{4-1-3}$$

根据费曼参数化公式：

$$\frac{1}{A_1A_2A_3}=2\int_0^1 dx_1dx_2dx_3\delta(x_1+x_2+x_3-1)\frac{1}{(x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3)^3}$$
$$=2\int_0^1 dx_1dx_2dx_3\delta(x_1+x_2+x_3-1)\tag{4-1-4}$$
$$*\frac{1}{\{x_1[(p_1-k_2)^2-m_1{}^2]+x_2(k_2{}^2-m_2{}^2)+x_3[(p_2-k_2)^2-m_1^{'2}]\}^3}$$

积分Π化为：

$$\Pi=2\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx_1dx_2dx_3\delta(x_1+x_2+x_3-1)\tag{4-1-5}$$
$$*\frac{1}{\{x_1[(p_1-k_2)^2-m_1{}^2]+x_2(k_2{}^2-m_2{}^2)+x_3[(p_2-k_2)^2-m_1^{'2}]\}^3}$$

下面我们对式(4-1-5)的被积部分分母单独进行处理：

$$x_1[(p_1-k_2)^2-m_1{}^2]+x_2(k_2{}^2-m_2{}^2)+x_3[(p_2-k_2)^2-m_1^{'2}]$$

$$=x_1(p_1{}^2+k_2{}^2-2p_1k_2-m_1{}^2)+x_2(k_2{}^2-m_2{}^2)+x_3(p_2{}^2+k_2{}^2-2p_2k_2-m_1^{'2})$$

$$=x_1p_1{}^2+x_1k_2{}^2-2x_1p_1k_2-x_1m_1{}^2+x_2k_2{}^2-x_2m_2{}^2+x_3p_2{}^2+x_3k_2{}^2-2x_3p_2k_2-x_3m_1^{'2}$$

$$=(x_1+x_2+x_3)k_2{}^2-2x_1p_1k_2-2x_3p_2k_2+x_1p_1{}^2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2+x_3p_2{}^2-x_3m_1^{'2}$$

$$=k_2{}^2-2x_1p_1k_2-2x_3p_2k_2+x_1p_1{}^2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2+x_3p_2{}^2-x_3m_1^{'2}$$

$$=(k_2-x_1p_1-x_3p_2)^2-(x_1p_1+x_3p_2)^2+x_1p_1{}^2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2+x_3p_2{}^2-x_3m_1^{'2}\tag{4-1-6}$$

我们令$\ell=k_2-x_1p_1-x_3p_2$，则式(4-1-6)化为：

$$\ell^2-x_1p_1{}^2-x_3p_2{}^2-2x_1x_3p_1p_2+x_1p_1{}^2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2+x_3p_2{}^2-x_3m_1^{'2}$$

$$=\ell^2+x_1(1-x_1)p_1{}^2+x_3(1-x_3)p_2{}^2-2x_1x_3p_1p_2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2-x_3m_1^{'2}$$

$$=\ell^2+x_1(1-x_1)p_1{}^2+x_3(1-x_3)p_2{}^2+x_1x_3(q^2-p_1{}^2-p_2{}^2)-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2-x_3m_1^{'2}$$

$$=\ell^2+x_1(1-x_1-x_3)p_1{}^2+x_3(1-x_1-x_3)p_2{}^2+x_1x_3q^2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2-x_3m_1^{'2}$$

$$=\ell^2+x_1x_2p_1{}^2+x_2x_3p_2{}^2+x_1x_3q^2-x_1m_1{}^2-x_2m_2{}^2-x_3m_1^{'2}\tag{4-1-7}$$

再令$\Delta=-x_1x_2p_1{}^2-x_2x_3p_2{}^2-x_1x_3q^2+x_1m_1{}^2+x_2m_2{}^2+x_3m_1^{'2}$，于是式(4-1-7)化为：$\ell^2-\Delta$

所以把式(4-1-7)整理后带入式(4-1-5)，得到：

$$\Pi = 2\int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^3} \tag{4-1-8}$$

式(4-1-8)对应的四维动量积分公式是：

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} (\frac{1}{\Delta})^{n - \frac{d}{2}} \tag{4-1-9}$$

将算符条件带入式(4-1-9)中，得到：

$$\int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^3} = -\frac{i}{32\pi^2 \Delta} \tag{4-1-10}$$

最后再将式(4-1-10)代回到式(4-1-8)中，我们就得到了关联函数的第一种表达式：

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{(-i)}{16\pi^2 \Delta} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 (-\Delta)^{-1} \end{aligned} \tag{4-1-11}$$

4.2 关联函数的色散积分形式

为了检验双重色散关系，我们还需要得到上述关联函数如下的色散积分：

$$\Pi（p_1^2, p_2^2, q^2) = \int_{m_1^2}^{\infty} ds_1 \int_{m_1^{'2}}^{\infty} dx_2 \frac{\rho(s_1, s_2, q^2)}{(s_1 - p_1^2)(s_2 - p_2^2)} \tag{4-2-1}$$

其中，我们认为m_1和$m_1^{'}$是重夸克。

在上式中$\rho(s_1, s_2, q^2)$项就是谱密度：

$$\rho(p_1^2, p_2^2, q^2) = \frac{(-2\pi i)^3}{(2\pi i)^2} \frac{1}{(2\pi)^4} I_\Delta \tag{4-2-2}$$

其中：

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \int d^4 k \delta(k_1^2 - m_1^2) \delta(k_2^2 - m_2^2) \delta(k_1^{'2} - m_1^{'2}) \\ &= \int d^4 k_2 \delta(k_2^2 - m_2^2) \delta[(p_1 - k_2)^2 - m_1^2] \delta[(p_2 - k_2)^2 - m_1^{'2}] \\ &= \int d^3 k_2 \frac{1}{2E_k} \delta(p_1^2 + k_2^2 - 2p_1 k_2 - m_1^2) \delta(p_2^2 + k_2^2 - 2p_2 k_2 - m_1^{'2}) \end{aligned} \tag{4-2-3}$$

$$=\int d^3k_2\frac{1}{2E_k}\delta(p_1{}^2+m_2{}^2-2p_1k_2-m_1{}^2)\delta(p_2{}^2+m_2{}^2-2p_2k_2-m_1^{'2})$$

$$=\int d^3k_2\frac{1}{2E_k}\delta(p_1{}^2+m_2{}^2-m_1{}^2-2E_kp_1^0+2|k||p_1|\cos\theta)$$
$$*\delta(p_2{}^2+m_2{}^2-m_1^{'2}-2E_kp_2^0-2|k||p_1|\cos\theta)$$

$$=\int dk_2|k_2|^2d\cos\theta d\phi\frac{1}{2E_k}\delta(p_1{}^2+m_2{}^2-m_1{}^2-2E_kp_1^0+2|k||p_1|\cos\theta)$$
$$*\delta(p_2{}^2+m_2{}^2-m_1^{'2}-2E_kp_2^0-2|k||p_1|\cos\theta)$$

$$=\int d|k_2||k_2|^2(2\pi)\frac{1}{2|k_2||p_1|}\frac{1}{2E_k}\delta[p_1{}^2+p_2{}^2+2m_2{}^2-m_1{}^2-m_1^{'2}-2E_k(p_1^0+p_2^0)]$$
$$\Theta(p_1,p_2)$$

$$=\int d|k_2||k_2|^2(2\pi)\frac{1}{2|k_2||p_1|}\frac{1}{2E_k}\delta[2E_k(p_1^0+p_2^0)-p_1{}^2-p_2{}^2+m_1{}^2+m_1^{'2}-2m_2{}^2]$$
$$\Theta(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$$

$$=\int d|k_2|E_k{}^2(2\pi)\frac{1}{2|k_2||p_1|}\frac{1}{2E_k}\delta[2E_k(p_1^0+p_2^0)-p_1{}^2-p_2{}^2+m_1{}^2+m_1^{'2}-2m_2{}^2]$$
$$\Theta(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int dE_k\frac{1}{|p_1|}\delta[2E_k(p_1^0+p_2^0)-p_1{}^2-p_2{}^2+m_1{}^2+m_1^{'2}-2m_2{}^2]$$
$$\Theta(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{1}{|p_1|}\frac{1}{2(p_1^0+p_2^0)}\Theta(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{2(p_1^0+p_2^0)}{\sqrt{\lambda[(p_1+p_2)^2,p_1{}^2,p_2{}^2]}}\frac{1}{2(p_1^0+p_2^0)}\Theta(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda[(p_1+p_2)^2,p_1{}^2,p_2{}^2]}}\Theta(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)\tag{4-2-4}$$

我们将 I_Δ 通过复杂的推导过程从式(4-2-3)转化成了式(4-2-4)的形式，接下来我们将式(4-2-4)和式(4-2-2)代回到关联函数的色散积分表示(4-2-1)中，得到：

$$\Pi\ (p_1^2,p_2^2,q^2)=\frac{(-2\pi i)^3}{(2\pi i)^2}\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{m_1^2}^{\infty}ds_1\int_{m_1^{'2}}^{\infty}ds_2\frac{\Theta(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2)}{(s_1-p_1^2)(s_2-p_2^2)}\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda[(p_1+p_2)^2,p_1^2,p_2^2]}}$$

(4-2-5)

式(4-2-5)是通过双重色散关系得到的关联函数表达式，我们接下来将它和通过直接计算得到的关联函数表达式(4-1-11)进行比较：

这里我们使用 matlabR2018 版本进行运算，其中输入参数取：

$p_1{}^2 = -100GeV^2$，$p_2{}^2 = -100GeV^2, q^2 = 0.0GeV^2$,

$m_1 = 4.7GeV, m_1^{'} = 1.35GeV, m_2 = 0.0GeV$

直接计算和色散关系形式的最终结果都约为 0-0.000151808i 左右，于是我们便从数值上验证了上述双重色散关系。

结论

本文简单介绍了 QCD 求和规则方法，并以最简单的单圈三角图为例，详细讨论了双重色散关系，在借助 QCD 求合规则方法计算介子和重子形状因子时，双重色散关系是必要的数学基础。本文可以看作对介子情形的验证，而对于重子情形，其验证方法是类似的。

致谢

首先感谢我的指导老师，本篇论文是在老师的悉心教导之下才得以完成的，其次，我要感谢我的父母，给我提供了安静理想的环境让我能够专心学习。在此，我要对他们表示衷心的感谢。在本文的写作过程中，我的指导老师对我的指导严谨而不失亲切，给我提供了非常大的帮助，也让我从中学到了很多的专业知识。另外，还要感谢我大学期间的每一位老师，他们认真的教学态度，帮助我培养了遇到难题勇于克服的精神，也为我的学习生涯产生了很大的影响。本文的写作到完稿，让我从中收获了很多，不仅仅是知识，还有认真的态度和严谨的精神，在以后的生活中，我也会加倍努力对待每一件事来回报帮助过我的老师，父母。

参考文献

[1] 裘忠平，现代量子场论导引[M]，华中师范大学出版社，1992.3
[2] 赵振兴，双重味重子弱衰变的唯象学研究[D]，2019.6
[3] 姚政 林力，千万个未解之谜 第四卷[J]，时代文艺出版社，2003.1
[4] 高崇寿，物理学的现代进展[M]，北京大学物理学院，2015
[5] 孙建新，高能碰撞中末态粒子赝快度分布的系统研究[D]，2014
[6] 张劲，QCD Sum Rules and Structure of Some Hadrons[D]，2011.1
[7] 张珠峰，QCD 求和规则，瞬子与新强子[D]，2008.4
[8] 范向向，三点费曼图的完整解析计算[D]，2011.3