

学校代码: 10730

分类号: O572

密级: 公开

兰州大学

硕士学位论文

(学 术 学 位)

论文题目 (中文) 粲介子半轻单举衰变的唯象学研究

论文题目 (外文) Phenomenonological study on semi-leptonic
inclusive decay of charm meson

作 者 姓 名 邵康康

学 科 专 业 物理学·粒子物理与原子核物理

研 究 方 向 粒子物理理论

教 育 类 型 学历教育人员申请硕士学位

指 导 教 师 于福升教授

合 作 导 师

论文工作时间段 2022 年 9 月 至 2025 年 3 月

答 辩 日 期 2025 年 5 月

校址: 甘肃省兰州市城关区天水南路 222 号

原创性声明

本人郑重声明：本人所呈交的学位论文，是在导师的指导下独立进行研究所取得的成果。学位论文中凡引用他人已经发表或未发表的成果、数据、观点等，均已明确注明出处。除文中已经注明引用的内容外，不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的科研成果。对本文的研究成果做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名：_____

日期：_____

关于学位论文使用授权的声明

本人在导师指导下所完成的论文及相关的职务作品，知识产权归属兰州大学。本人完全了解兰州大学有关保存、使用学位论文的规定，同意学校保存或向国家有关部门或机构送交论文的纸质版和电子版，允许论文被查阅和借阅；本人授权兰州大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用任何复制手段保存和汇编本学位论文。本人离校后发表、使用学位论文或与该论文直接相关的学术论文或成果时，第一署名单位仍然为兰州大学。

本学位论文研究内容：

☒ 可以公开

☐ 不宜公开，已在学位办公室办理保密申请，解密后适用本授权书。

（请在以上选项内选择其中一项打“√”）

论文作者签名：_____

导师签名：_____

日期：_____

日期：_____

粲介子半轻单举衰变的唯象学研究

中文摘要

当前重味物理领域面临若干长期存在的挑战，并引起领域内的广泛关注。其中之一是粲强子寿命疑难： D 介子寿命的理论预言与实验观测值并不一致，在某些参数值下 D^+ 介子理论预言中心值甚至是负值，同时粲重子寿命的次序对高阶修正高度敏感。主要原因在于 D 介子的衰变宽度依赖非微扰强子矩阵元的输入，而目前理论工作中使用的非微扰强子矩阵元均具有较强的模型依赖性。因此从 D 介子半轻单举衰变数据中实现非微扰强子矩阵元模型无关的拟合抽取，将是理解甚至解决粲强子寿命疑难的关键。

本文系统地进行了 D 介子的半轻单举衰变的唯象学分析，涵盖三种 D 介子半轻单举衰变。具体而言，

- 一 理论上，本文基于重夸克有效理论和算符乘积展开，经过两重解析积分可得 D 介子半轻单举过程的电子能谱，对其进行加权积分可得 D 介子半轻单举衰变道的衰变宽度和电子能量矩的理论公式，这些公式以粲夸克质量负幂次和强相互作用耦合常数进行双重展开。对于粲夸克质量负幂次展开的幂次修正，本文推导的理论公式精确至量纲六算符非微扰矩阵元的贡献；对于强相互作用耦合常数展开的微扰修正，本文精确至两圈图水平。此外末态夸克质量效应也被考虑在内。
- 二 数据方面，本文从美国的 CLEO 合作组关于 D^0 与 D^+ 介子半轻单举衰变过程的数据中抽取出衰变宽度和电子能量矩的实验值，从我国的 BESIII 合作组关于 D_s^+ 半轻单举衰变过程的数据中抽取出衰变宽度和电子能量矩的实验值，这些值将与相应理论表达式一齐进行全局拟合。
- 三 唯象学分析，由于衰变宽度对粲夸克质量高度敏感，本文基于三种粲夸克质量方案进行全局拟合，此外在三种粲夸克质量方案的基础上，高阶幂次修正的误差贡献也被包括在内。由于同位旋对称性的约束，本文不区分 D^0 和 D^+ 介子的非微扰强子矩阵元。

在该工作中，本文取得了以下成果：

- 一 首次对粲强子半轻单举衰变过程中的量纲五算符非微扰强子矩阵元实现模型无关的高精度拟合抽取：该拟合结果可以直接用于粲强子寿命的理论计算。
- 二 提出 1S 质量方案是目前计算粲强子寿命最佳的质量方案：本文在 1S 质量方案下给出粲强子半轻单举衰变宽度精确至三圈图微扰修正的数值结果，

展示出极好的收敛性。

本文选取 $1S$ 质量方案下重夸克有效理论基本参数的全局拟合估计值作为最终推荐值, 并给出关于 D 介子寿命的简单定性讨论。

关键词: 重夸克有效理论, 算符乘积展开, 粲介子半轻单举衰变

PHENOMENOLOGICAL STUDY ON SEMI-LEPTONIC INCLUSIVE DECAY OF CHARM MESON

Abstract

The field of heavy-flavor physics faces several long-standing challenges that have garnered widespread attention. One of the key issues is the charm hadron lifetime puzzle: theoretical predictions for the D meson lifetimes do not align with experimental results. Under certain conditions, the theoretical prediction for the D^+ meson even yields a negative central value. Additionally, the hierarchy of charm hadron lifetimes is highly sensitive to higher-order corrections. This discrepancy arises from the dependence of D meson decay widths on non-perturbative strong interaction matrix elements, which are model-dependent in current theories. Therefore, obtaining model-independent extractions of these matrix elements from semi-leptonic D meson decay data is crucial to resolving this issue.

In this study, a systematic phenomenological analysis of semi-leptonic inclusive decays of D mesons are conducted, covering three types of D meson semi-leptonic inclusive decays. Specifically,

Theoretically Aspect, this study is based on the heavy quark effective theory and operator product expansion. After performing analytic integration, we obtain the electron energy spectrum for the D meson semi-leptonic inclusive decay. By applying weighted integration, we derive theoretical formulas for the decay width and electron energy moments of D meson semi-leptonic inclusive decays. These formulas are expanded in terms of the negative power of the charm quark mass and the strong interaction coupling constant. For the power corrections in the charm quark mass expansion, the theoretical formulas derived in this study accurately account for contributions from dimension-six operator non-perturbative matrix elements. For the perturbative corrections in the expansion of the strong interaction coupling constant, we include up to two-loop diagrams. Additionally, the effects of final-state quark masses are also considered.

Data Aspect, We extracted experimental values for the decay widths and electron energy moments from the CLEO collaboration's data on the semi-leptonic decays of D^0 and D^+ mesons in the United States. Additionally, we extracted experimental values for the decay widths and electron energy moments from the BESIII collaboration's data on

the semi-leptonic decays of D_s^+ mesons in China. These values will be used for global fitting in conjunction with the corresponding theoretical expressions.

Phenomenological Analysis Aspect, Since the strong sensitivity of the decay width to the charm quark mass, we perform a global fit based on three different charm quark mass schemes. Furthermore, the error contributions from higher-order power corrections are also included in these scenarios. Due to the constraints of isospin symmetry, we do not distinguish between the non-perturbative strong interaction matrix elements of D^0 and D^+ mesons.

For the first time, a model-independent fit extraction of the dimension-five operator non-perturbative strong interaction matrix elements in the charm hadron semi-leptonic inclusive decay is achieved. The fitting results can be directly used for the theoretical calculation of charm hadron lifetimes. This study identifies the 1S mass scheme as the optimal choice for calculating charm hadron lifetimes. We present precise numerical results for the semi-leptonic decay width up to three-loop perturbative corrections under the 1S scheme, showing excellent convergence.

This study selects the global fit estimates of the fundamental parameters in the heavy quark effective theory under the 1S mass scheme as the final recommended values and provides a simple qualitative discussion on D meson lifetimes.

Keywords: Heavy Quark Effective Theory, Operator Product Expansion, Semi-leptonic Inclusive Charm Decay

目 录

中文摘要	I
Abstract.....	III
第一章 引言	1
第二章 粒子物理标准模型	4
2.1 粒子物理标准模型.....	4
2.1.1 粒子物理标准模型.....	4
2.1.2 量子色动力学	5
2.2 重夸克有效理论	6
2.3 基于重夸克有效理论的局域算符乘积展开	8
2.4 本章回顾.....	10
第三章 粲介子半轻单举衰变的理论研究	11
3.1 幂次修正	11
3.1.1 B 介子半轻单举衰变.....	11
3.1.2 第二种参数化方案.....	20
3.1.3 两种参数化方案之间的转换.....	22
3.1.4 粲强子单举衰变过程的电子能谱及衰变宽度.....	26
3.2 微扰修正	26
3.2.1 单圈水平上 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程的领先幂次修正	27
3.2.2 单圈水平上 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的领先幂次修正：结构函数	29
3.2.3 单圈水平上 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的领先幂次修正：相空间解析积分	32
3.2.4 单圈水平上 $D \rightarrow X e^+ \nu$ 过程的领先幂次修正.....	34
3.3 更高量纲算符非微扰矩阵元的参数化.....	35

3.4 本章回顾	38
第四章 粲介子半轻单举衰变的数据处理与唯象学分析	39
4.1 实验现状	39
4.1.1 D 介子半轻单举衰变绝对分支比的实验测量	39
4.1.2 D_s^+ 介子半轻单举衰变绝对分支比的实验测量	40
4.2 唯象学分析	42
4.2.1 电子能谱红外区域的理论外推	42
4.2.2 物理可观测量的抽取	46
4.2.3 重夸克质量方案	52
4.2.4 唯象学分析	55
4.3 本章回顾	65
第五章 总结与展望	66
附录 A \overline{MS} 与 1S 质量方案下可观测量的理论公式	69
参考文献	71
在学期间的研究成果	76
致 谢	77

图 目 录

图 2-1	算符乘积展开领先幂次贡献 [1]	9
图 3-1	中微子能量积分区域	16
图 3-2	$b \rightarrow u$ 过程中电子能谱发散项的渐近行为	19
图 3-3	中间传播子离壳度的积分区域	21
图 3-4	两点关联函数的单圈修正 [2]	27
图 3-5	实发射部分奇点分析 1	33
图 3-6	实发射部分奇点分析 2	33
图 3-7	重夸克展开的旁观者夸克效应拓扑图 [3]	36
图 3-8	量纲六算符非微扰矩阵元之一: Eye-contractions 效应 [3]	37
图 4-1	实验室系下 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 衰变过程的电子能谱 [4]	40
图 4-2	实验室系下 $D_s^+ \rightarrow Xe^+\nu$ 衰变过程的电子能谱 [5]	41
图 4-3	实验室系下 $D \rightarrow Xe^+\nu_e$ 衰变过程归一化的电子能谱	44
图 4-4	实验室系下 $D \rightarrow Xe^+\nu_e$ 衰变过程的前四阶电子能量矩的概率密度分布	48
图 4-5	$D_s^+ \rightarrow Xe^+\nu_e$ 衰变过程的衰变宽度与前四阶电子能量原点矩的联合分布	50
图 4-6	$D_s^+ \rightarrow Xe^+\nu_e$ 衰变过程的衰变宽度、电子能量一阶原点矩与二、三、四阶中心矩的联合分布	52
图 4-7	非微扰参数 μ_π^2 的全局拟合估计	61
图 4-8	非微扰参数 μ_G^2 的全局拟合估计	61
图 4-9	$D^{0,+}$ 介子半轻单举衰宽度	61
图 4-10	D_s^+ 介子半轻单举衰宽度	61
图 4-11	动力学质量方案下基于 HQETSR 对粲介子衰变宽度的理论预言	64
图 4-12	动力学质量方案下基于 VIA 对粲介子衰变宽度的理论预言	64

表 目 录

表 3-1	HQETSR 关于 Bag 参数的数值结果	38
表 4-1	在实验室系下 D 介子半轻单举衰变过程每个 bin 的部分分支 比 [4]	40
表 4-2	实验室系下 D_s^+ 介子半轻单举衰变过程双标记侧每个 bin 的产 额 [5]	42
表 4-3	D^0 介子半轻单举衰变电子能谱红外区域外推结果	43
表 4-4	$D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e$ 过程每个能量点的单标记产额	46
表 4-5	$D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e$ 过程每个能量点的单标记效率	47
表 4-6	物理可观测量的实验观测值	51
表 4-7	\overline{MS} 质量方案下对非微扰参数的全局拟合估计结果	57
表 4-8	1S 质量方案下对非微扰参数的全局拟合结果	58
表 4-9	通过 HQETSR 计算得到的 Bag 参数数值结果 1	63
表 4-10	通过 HQETSR 计算得到的 Bag 参数数值结果 2	63

第一章 引言

数千年来,人类对无穷的探索从未止步。从日心说到宇宙微波背景,从物性论到粒子物理标准模型,人类对于自然世界的认识不断深入。在这个过程中,粒子物理学作为物理学的基石之一,着眼于极小尺度的现象和其背后的规律。物质的基本组成单元是什么,这依然是现代粒子物理学需要回答的问题。

二十世纪,科学发展的速度超过了人类历史上以往任何一个时期。在这个时期,人类对物质的认识发生了翻天覆地的变化。人类发现了电子、原子核、质子和中子等 [6–9]。从宇宙射线和加速器实验中发现了一系列新的粒子,比如 μ 子, π 介子, K 介子等 [10–14]。

随着对电磁相互作用 [15–23]、强相互作用 [24] 及电弱相互作用 [25–27] 的不断深入研究,人类对自然界基本相互作用的认识持续深化。在几代卓越物理学家的努力下建立的粒子物理标准模型,不仅成功解释了已有实验现象,还预言了新夸克 [28–32]、中间矢量玻色子 [33–35]、第三代带电轻子及中微子 [36,37] 和希格斯粒子 [38] 等新粒子,并通过后续实验不断得到验证。

粒子物理标准模型取得了巨大的成功,但依然对一些现象无法给出满意的解释。比如,为什么粒子的质量差别如此之大、为什么存在三代夸克和轻子、为什么存在 CP 破坏、为什么存在物质和反物质不对称、为什么存在暗物质暗能量、为什么存在引力且如此之弱等等。

追求统一,简洁和对自然界的更深刻的认识,是人类对于自然界的探究亘古不变的主旋律。标准模型美而残缺,它的残缺之处,正是人类对于自然界的探究的动力。寻找新物理,主要包含四个方向:高亮度前沿(寻找新现象),高能量前沿(寻找新粒子),宇宙学前沿(寻找天外来客)和理论前沿(寻找新架构)。

重味物理是高亮度前沿研究的重要平台,专注于底夸克和粲夸克及其相互作用的研究。过去几十年,实验上关于重味强子弱衰变积累了大量的数据,同时重味物理具有丰富的物理可观测量,这使得精确研究成为可能。它能帮助我们更好地认识强相互作用的本质,精确检验粒子物理标准模型从而寻找超出标准模型的新物理。

相比于 B 介子和底重子弱衰变,粲味强子弱衰变有其独特价值。作为唯一一类由上行夸克引发的弱衰变,这类过程对可能存在的高能标处的新物理高度敏感;同时该过程的典型能标接近非微扰区域,理解这类过程的动力学机制对我们理解强相互作用非微扰动力学机制具有启示作用。

区分所有末态粒子的过程被称为遍举过程 [39], 而区分部分末态粒子的过程被称为单举过程 [40]。相比于遍举过程, 单举过程基于算符乘积展开, 可以从第一性原理出发系统地求解幂次修正的形式, 这使得理论误差相对可控 [41]。与此同时, 基于重夸克有效理论的算符乘积展开在底强子弱衰变领域取得了巨大的成功。然而, 关于粲味强子弱衰变的理论研究相对较少, 且幂次修正和微扰修正的收敛性较差, 使得该类过程的研究相比底强子弱衰变更具挑战性。因此, 深入研究此类过程对于该领域理论的进一步发展具有重要意义

目前, 在重味物理领域仍存在一些长期未解的难题, 其中一些包括:

- 粲强子寿命疑难: 粲强子寿命的理论预言和实验测量结果存在较大差异, 甚至 D^+ 介子寿命在某些参数方案下的中心值小于零 [3, 42, 43]。此外, 粲重子寿命的理论预言对幂次修正和微扰修正非常敏感 [42–44]。
- V_{cb} 和 V_{cb} 疑难: 从单举衰变中抽取的 CKM 矩阵元 V_{cb} 和 V_{cb} 和从遍举衰变中的抽取结果相差 3 倍 σ [45]。与其他类似的 CKM 矩阵元 V_{cs} 和 V_{cd} 进行对比是必要的, 若从单举衰变中抽取的 V_{cs} 和 V_{cd} 与从遍举衰变中抽取的 V_{cs} 和 V_{cd} 一致, 那么底强子单举弱衰变或许存在未知的新物理效应。
- B 介子反常: $b \rightarrow sl^+l^-$ 过程中发现测量得到的角分布和粒子物理标准模型的预言不符 [46], 除了继续对 $b \rightarrow sl^+l^-$ 进行高精度计算, 更重要的是和其他类似的过程进行检验, 特别是唯一上行夸克弱衰变 $c \rightarrow l^+l^-$ 。

对于更清楚的认识, 理解甚至解决这些疑难, 粲味强子弱衰变恰好起到关键性的作用。

由于粲味强子弱衰变的重要性, 美国康奈尔大学的 CLEO(Cornell Electron-Position storage Ring Large Dector) 合作组和 BESIII(Beijing Sepctrometer III) 合作组对其进行了多次测量。2009 年, CLEO 合作组首次测量了 D^0 , D^+ 和 D_s^+ 介子的半轻单举衰变分支比和电子能谱 [4], 我国的 BESIII 合作组对 D_s^+ 介子的半轻单举衰变分支比和电子能谱的测量结果进行更新 [5]。至此三种 D 介子的衰变分支比均具有较高的精度。对于粲重子 Λ_c , BESIII 合作组在 2018 年首次测量了其半轻单举衰变分支比和电子能谱 [47], 随后于 2023 年对结果进一步更新 [48], 这为抽取非微扰强子矩阵元提供了必要的的数据。未来基于神经网络技术, 实验上能够实验 X 末态的完全重建以区分 X_d 和 X_s 末态。这将为从单举衰变中抽取的 CKM 矩阵元 V_{cs} 和 V_{cd} 提供必要的的数据。同时, q^2 谱也可以被提取。由于重参数不变性约束 [49], q^2 矩依赖于较少的非微扰强子矩阵元, 从而能够更高效地提取这些矩阵元, 并与从电子能量矩中提取的非微扰矩阵元进行对比验证 [50]。

粲强子寿命的理论计算依赖于一些非微扰的强子矩阵元, 其中一部分基于重夸克对称性从底强子的非微扰矩阵元演化而来, 另一部分基于 D 和 D^* 质量的关

系得到，它们的精度很低 [41,51,52]。此外由于幂次修正的收敛性较差，目前的工作主要集中于树图水平上高量纲算符的计算 [53,54]。

综上所述，实验上已经对粲味强子单举衰变进行测量，并且对于某些衰变道的测量精度达到很高的水平，未来将对更多衰变道进行更精确的测量。理论上对粲味强子单举衰变的研究仍然相对有限，尤其是系统的唯象学分析。本文首次对 D 介子半轻单举衰变做系统性的理论和唯象学研究，抽取并计算各类物理可观测量，非微扰参数的拟合估计精度与底强子的非微扰参数相一致，并讨论了质量方案对微扰修正和幂次修正的收敛性影响，提出 $1S$ 质量方案是目前计算粲强子寿命过程中最佳的质量方案。该工作对粲味强子弱衰变的理论研究具有重要意义，同时也有助于理解甚至解决粲强子寿命疑难。此外，对从单举衰变中抽取 CKM 矩阵元 V_{cs}, V_{cd} 以及粲重子非微扰参数的拟合估计奠定了理论基础。

本文的主要分为以下几个部分，第二章是对粒子物理标准模型的介绍，主要包括和本文研究内容密切相关的量子色动力学，重夸克有效理论和基于重夸克有效理论的局域算符乘积展开。第三章基于重夸克有效理论和算符乘积展开对粲介子半轻单举衰变进行系统研究，包括精确至两圈图水平的微扰修正，精确至量纲六算符的幂次修正。第四章基于已有的实验数据，抽取相应的物理观测量进行全局拟合。第五章是总结与展望，对本文的工作进行总结并指出不足之处，同时对未来做短期和长期的展望。

第二章 粒子物理标准模型

由于电弱统一理论和量子色动力学取得的巨大成功，很多人投入到标准模型的构建中去。通常需要场论具有可重整性，不可重整的理论是不自洽的。Wilson 重新理解了量子场论中的发散并提出了有效场论的思想，这使得对不同能标处的理论理解更加深刻。本章对量子色动力学进行简单介绍，并基于有效场论的思想介绍重夸克有效理论和基于重夸克有效理论的算符乘积展开，这是后续对粲介子单举半轻衰变做系统性研究的理论基础。

2.1 粒子物理标准模型

2.1.1 粒子物理标准模型

粒子物理标准模型基于规范群

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y, \quad (2-1)$$

其中， $SU(3)_C$ 和 $SU(2)_L$ 分别是强相互作用和弱相互作用的规范群。一般地， $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 自发破缺至描述电磁相互作用的阿贝尔规范群 $U(1)_{em}$ ； $SU(3)_C$ ， $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的量子数分别是颜色（红绿蓝）、弱同位旋（两个弱同位旋态 $T_3 = \pm \frac{1}{2}$ ）和超荷（任意实数）。电荷、超荷与弱同位旋的第三分量之间存在以下的关系 (Gell-Mann–Nishima relation)，

$$Q = T_3 + Y. \quad (2-2)$$

粒子物理标准模型的物质场可以按照下面两种方式进行分类：按照场在 $SU(3)_C$ 规范群变换下的性质，分为夸克和轻子：（反）夸克属于 $SU(3)_C$ 的（反）三重态，具有色荷（反）红，（反）绿和（反）蓝，轻子属于 $SU(3)_C$ 单态；按照场在 $SU(2)_L$ 规范群下的变换性质，分为 $SU(2)_L$ 双重态（左手场）和 $SU(2)_L$ 单态（右手场），只有 $SU(2)_L$ 双重态可以参与到弱相互作用带电流。除此之外，标准模型的物质场分为三代，每代之间具有相同的量子数，仅存在质量的差异。

三种局域规范群背后反映了三种局域规范对称性（不变性），局域不变性反过来则要求每个局域规范群都应存在一个属于其自伴表示的无质量规范玻色子。 $SU(3)_C$ ， $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的无质量规范玻色子分别是属于各自自伴表示的 8 个胶子、3 个 W_a^μ 和 B_μ 。电弱对称性破缺之后， W_a^μ 和 B_μ 混合为 W_μ^\pm, Z^0 和 γ ，其

中只有光子无质量，对应于描述剩余对称性的阿贝尔规范群 $U(1)_{\text{em}}$ 自伴表示的中间规范玻色子。

在粒子物理标准模型的拉格朗日量涵盖了费米子场的动力学项、规范玻色子的耦合项、希格斯玻色子的动力学项与势能项，以及 Yukawa 耦合项。规范玻色子的耦合项不仅允许其自身耦合，还通过协变导数算子与费米子场相互耦合。希格斯机制赋予了规范玻色子质量，而希格斯玻色子则通过 Yukawa 耦合为费米子场提供了质量。

虽然标准模型成功描述了实验现象并且关于新的实验现象的预言不断得到证实，为理解基本粒子之间的相互作用提供了重要的信息。但也有很多悬而未决的问题，比如标准模型没有包含引力相互作用，无法解释正反物质不对称等等，表明粒子物理标准模型并非的最终理论，物理学家也在不断寻找超出标准模型的新物理，以期对宇宙有更深刻、简洁的认识。

2.1.2 量子色动力学

描述夸克和胶子间强相互作用的理论称为量子色动力学 (Quantum Chromodynamics, QCD)。尽管由于当前理论精度的限制，量子色动力学尚未能够像量子电动力学那样实现对物理现象的高精度预言，但新物理效应尚未被发现，似乎表明量子色动力学仍具有强大的预言能力。与电弱相互作用不同，量子色动力学严格服从 $SU(3)_C$ 局域规范群对应的颜色规范对称性，因此可以构造出局域规范不变的拉格朗日量，

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_i \left(i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ij} - g_s \gamma^\mu T_{ij}^a \mathcal{A}_\mu^a - m_q \delta_{ij} \right) q_j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2-3)$$

其中 $\bar{q}_i (q_j)$ 是带有色指标的反夸克场 (夸克场)，夸克场的味道 $q = (u, d, s, c, b, t)$ ，其质量是 m_q ， \mathcal{A}_μ^a 是带有色指标 a 的胶子场， a 的取值为从 1 到 8，对应于 8 种颜色的胶子场，它们属于 $SU(3)_C$ 群的自伴表示。 T_{ij}^a 是 $SU(3)_C$ 群自伴表示的生成元。 $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a - g_s f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$ 是胶子的规范场强张量。

强相互作用耦合常数 $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ 具有能标依赖，其满足重整化群方程，

$$p \frac{\partial}{\partial p} \alpha_s = \beta(p),$$

区别于量子电动力学，QCD 的 β 函数是负的，这表明强相互作用的耦合常数随着相互作用的动量转移增大而减小。在动量转移 p 很大时， α_s 会变得很小，表明在短距离上耦合很弱，这种现象被称为渐进自由，即对强相互作用的高能区域，微扰论是适用的。

$$\alpha_s(p) = \frac{1}{\left[1/\alpha_s(\mu) + \beta_0 \ln(p^2/\mu^2) \right]},$$

其中 β_0 正比于 β 函数的领头阶项, 定义非微扰能标 $\Lambda_{\text{QCD}} = p e^{-1/2\beta_0\alpha_s(p)}$, 强相互作用耦合常数关于非微扰能标的依赖为:

$$\alpha_s(p) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_q) \ln(p^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}. \quad (2-4)$$

其中, N_q 是夸克味道数目。式(2-4)表明, 某个过程的转移动量 p 接近非微扰能标 Λ_{QCD} 时, $\alpha_s(\Lambda_{\text{QCD}})$ 是发散的, 表明微扰论于该能标处失效。

这是粒子物理领域内长期存在且引起广泛关注一类问题, 即量子色动力学非微扰问题。格点量子色动力学基于第一性原理通过将时空离散化以计算低能标处的物理过程。但是随着格距变小, 格子数目增加, 所需的计算资源爆炸式增长, 寻求理论预言精度与计算资源间的平衡使得很多物理问题的研究受限。

此外, 有效理论也经常被用于研究强相互作用非微扰, 若物理系统中可以构造出一个无量纲的小量, 则可以构造按照其幂次展开的有效场论。通常, 这样的小量被选为一个小的能量或动量标度和一个大的能量或动量标度之间的比值, 使得可以通过幂次展开进行逐阶计算。同时, 要求有效场论具有的对称性与完整理论的严格或近似对称性一致, 并通过构造满足这些对称性最普遍的拉氏量, 从而保证有效场论的计算结果是模型无关的。

由于微扰展开在高能标处的收敛性极好, 因此在高能标处的理论研究相对比较成熟, 但对于低能非微扰能区的理论研究相对比较匮乏。不同于 B 介子或底重子, 粲夸克的质量更接近非微扰能区, 处于微扰区和非微扰区的交界处。在该能标区域, 无论是按量子色动力学强相互作用耦合常数展开的高阶微扰修正还是按粲夸克质量负幂次展开的高阶幂次修正, 均具有不可忽略的贡献, 因此理解粲强子衰变的动力学机制对于理解量子色动力学非微扰的动力学机制具有启示作用。

2.2 重夸克有效理论

事实上, QCD 的拉格朗日量 (式(2-3)) 包含有严格的对称性和近似对称性; 前者主要包括洛伦兹对称性、色规范对称性、正反物质对称性等, 后者主要包括: 手征对称性和重夸克对称性。粒子物理标准模型中, 三种夸克的质量远小于非微扰能标, 另外三种夸克质量远大于非微扰能标:

$$m_{u,d,s} \ll \Lambda_{\text{QCD}} \ll m_{c,b,t}. \quad (2-5)$$

u, d, s 夸克被称为轻夸克, 而 c, b, t 夸克则被称为重夸克。轻夸克部分存在近似的手征对称性及其自发破缺, 而重夸克部分则有近似的重夸克对称性。

仅考虑三种轻夸克的拉格朗日量, 并忽略其质量项 (手征极限), 意味着左手费米子场和右手费米子场解耦, 对应的拉格朗日量具有 $\text{SU}(3)_R \otimes \text{SU}(3)_L$ 对

称性。手征极限下，拉格朗日量的对称性并非真空或强子谱的对称性，量子色动力学的手征对称性自发破缺至矢量量子群 $SU(3)$ ，对应 $3^2 - 1$ 个无质量 Goldstone 玻色子是最轻的赝标介子八重态¹。手征近似理论仅适用于轻强子及其相互作用。

不同于 u, d, s 夸克， c 夸克和 b 夸克的质量远大于非微扰能标。若研究的物理过程涉及到的能标位于 Λ_{QCD} 时， Λ_{QCD}/m_Q 可被视为小量（ m_Q 是重夸克质量）。可以实现以 Λ_{QCD}/m_Q 为展开参数进行重夸克质量负幂次展开，其领头阶对应于 $m_Q \rightarrow \infty$ 的极限，在该极限下存在重夸克对称性（重夸克自旋对称性，重夸克味对称性）。

重夸克自旋相互作用强度正比于磁矩

$$\propto \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{B}^a}{m_Q} \xrightarrow{m_Q \rightarrow \infty} 0,$$

其中， $\vec{\sigma}$ 为重夸克的自旋算符， \vec{B}^a 为色磁场。重夸克的自旋在重夸克极限下退耦。考虑一个包含重夸克的系统，其总角动量包含三部分：重夸克的自旋 \vec{s}_Q ，轻自由度（包括轻夸克和胶子）的自旋 \vec{s}_q 和轨道角动量 \vec{L} ：

$$\vec{J} = \vec{S}_Q + \vec{L} + \vec{s}_q \equiv \vec{S}_Q + \vec{s}_\ell.$$

在重夸克极限下，由于重夸克的自旋退耦，所以总角动量守恒意味着轻自由度的总角动量² \vec{s}_ℓ 守恒，属于同一个自旋多重态的重味强子或重夸克偶素的质量在重夸克极限下是简并的。例如基态粲介子 (D, D^*) 以及基态底介子 (\bar{B}, \bar{B}^*)。

在只包含一个重夸克的强子中，重自由度与轻自由度相互作用强度在非微扰 QCD 的能标 Λ_{QCD} 量级，即放出或吸收胶子对重夸克的速度带来的改变为

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m_Q} = O\left(\frac{\Lambda_{QCD}}{m_Q}\right) \xrightarrow{m_Q \rightarrow \infty} 0,$$

即在重夸克极限下，单重强子内的重夸克是几乎静止的，其仅作为提供 $SU(3)_c$ 色三重态而存在，重费米子场（粲夸克和底夸克）在重夸克极限是简并的。

QCD 中重夸克部分的拉格朗日量为：

$$\mathcal{L}_Q = \bar{Q}(i\not{D} - m_Q)Q, \quad D_\mu = \partial_\mu + ig_s A_\mu^a T^a, \quad (2-6)$$

式(2.2)中，包含了关于夸克味道的求和。在 QCD 中，重夸克的传播子为

$$\frac{i}{\not{p} - m_Q + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m_Q)}{p^2 - m_Q^2 + i\epsilon}, \quad (2-7)$$

¹ 由于手征对称性并非严格对称性，因此对应的 8 个无质量玻色子并非严格质量等于零

² 这里讨论基态介子（重子）

其中, 重夸克的动量为 $p = m_Q v + k$, v 是重强子的速度, 满足 $v^2 = 1$, $k \sim \mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ 是重夸克的离壳动量。选取重夸克离壳动量与重夸克质量的比值作为展开参数, 则上面的传播子变为

$$\frac{i[m_Q(1+\not{p})+\not{k}]}{2m_Q v \cdot k + k^2 + i\epsilon} \xrightarrow{m_Q \rightarrow \infty} \frac{1+\not{v}}{2} \frac{i}{v \cdot k} + \mathcal{O}\left(\frac{k}{m_Q}\right). \quad (2-8)$$

当 $v = \{1, \vec{0}\}$ 上式的 $(1+\not{v})/2$ 作用到狄拉克旋量投影出正粒子, $(1-\not{v})/2$ 则投影出反粒子。重夸克场可以被因子化为

$$Q(x) = e^{-im_Q v \cdot x} [Q_v(x) + \tilde{Q}_v(x)],$$

其中, 指数部分减除重夸克质量, 它重新将重夸克能动量的零点定义为 $m_Q v \cdot \tilde{Q}_v(x)$ 表示减除重夸克质量之后受到 $1/m_Q$ 压低的部分, $Q_v(x)$ 则表示领先幂次的部分。将上式代入 QCD 拉格朗日量中, 并经过必要的化简, 得到重夸克有效理论的拉格朗日量

$$\begin{aligned} L &= \bar{Q}_v \left(iv \cdot D + i\not{D}_\perp \frac{1}{2m_Q + iv \cdot D} i\not{D}_\perp \right) Q_v \\ &= \bar{Q}_v \left(iv \cdot D - \frac{1}{2m_Q} \not{D}_\perp \not{D}_\perp + \dots \right) Q_v \\ &= L_0 + L_1 + \dots, \end{aligned} \quad (2-9)$$

其中领头阶具有明显的重夸克味道对称性和重夸克自旋对称性, 相应的运动方程 $iv \cdot D Q_v = 0$; 拉格朗日量按照重夸克展开的次领先幂次, 包含 $-\bar{Q}_v \frac{D_\perp^2}{2m_Q} Q_v$ 和 $-g \bar{Q}_v \frac{\sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}}{4m_Q} Q_v$, 前者破坏了重夸克味道对称性, 后者破坏了重夸克味道-自旋对称性, 且关于重夸克对称性的破坏受到 $1/m_Q$ 的压低。

2.3 基于重夸克有效理论的局域算符乘积展开

由于重夸克质量远大于 Λ_{QCD} , 因此对于重强子衰变的物理可观测量, 存在按强相互作用耦合常数 α_s 的微扰展开和按 Λ_{QCD}/m_Q 的幂次展开, 这使得逐阶计算成为可能。在 B 介子与底重子的精确计算中, 这样的双重展开具有极好的收敛性。但在 D 介子与粲重子弱衰变中, 其微扰展开与幂次展开的收敛性均存在长期的讨论。

具体地, 根据光学定理, 某个过程的衰变宽度与该过程向前散射振幅的虚部相关, 以 $D \rightarrow X_s e^+ \nu$ 为例 (图2-1), 其衰变宽度为

$$\Gamma = \frac{1}{M_D} \text{Im} \langle D | i \int d^4 x e^{-ip_D \cdot x} T \left\{ \mathcal{H}_W^\dagger(x), \mathcal{H}_W(0) \right\} | D \rangle = \frac{1}{M_D} \text{Im} \langle D | R | D \rangle, \quad (2-10)$$

其中弱有效哈密顿量为:

$$\mathcal{H}_W = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{\text{CKM}} (\bar{q}_L^\mu c) (\bar{\nu}_\ell \gamma_{L\mu} \ell) = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{\text{CKM}} J_q^\mu J_{\ell\mu}, \quad (2-11)$$

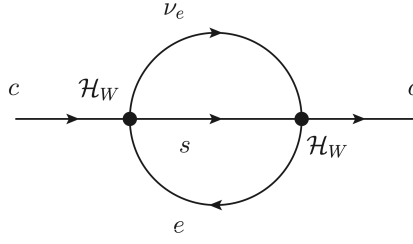


图 2-1 算符乘积展开领先幂次贡献 [1]

其中, $\gamma_L^\mu = \gamma^\mu P_L$, $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$ 是左手投影算子, G_F 是费米常数, V_{CKM} 是相关的 CKM 矩阵元模方, J_q^μ 和 J_ℓ^μ 分别是强子流和轻子流。

式(2-10)中的非局域算符的编时乘积可以用一组局域算符展开,

$$T \left\{ \mathcal{H}_W^\dagger(x), \mathcal{H}_W(0) \right\} = \sum C^n(x) \mathcal{O}_n(0). \quad (2-12)$$

其中树图水平上对应的局域算符是两夸克算符, 其一般形式为 $\bar{Q}_v(iD^{\mu_1} \dots iD^{\mu_n}) Q_v$, D^μ 是协变微分算子, 其本征值为离壳动量 $k \sim \Lambda_{QCD}$ 。式(2-12)中, 展开系数 $C^n(x)$ 对应于该过程的短程微扰贡献, 而受到 $1/m_c$ 压低的局域算符矩阵元对应于长程非微扰贡献。前者可以通过微扰理论逐阶计算, 后者涉及强相互作用非微扰, 需要通过格点量子色动力学或从实验数据中抽取得到。

计算 $c \rightarrow se^+\nu$ 过程分为三步: 首先在微扰展开的特定阶, 在 $\mu \sim m_c$ 处抽取出 Wilson 系数。由于算符乘积展开是算符之间的关系, 可以通过将式(2-12)置于夸克和胶子态中, 计算 Wilson 系数; 其次, Wilson 系数必须通过求解对应局域算符的反常量纲并通过重整化群方程演化到 $\mu < m_c$ 处; 最后, 衰变宽度可以用一组局域算符矩阵元(非微扰参数)进行参数化, 一般标记为 $X_i(\mu)$,

$$2M_D X_i(\mu) \equiv \langle D | O_i | D \rangle|_\mu. \quad (2-13)$$

对于 D 介子半轻单举衰变过程, 通常非局域算符通常可以用以下一组局域算符 [1] 进行展开¹,

$$\begin{aligned} O_{\mu_3} &= \bar{c}_\nu c_\nu, & O_{r_G} &= \bar{c}_\nu [(iD_\mu), (iD_\nu)] [(iD^\mu), (iD^\nu)] c_\nu, \\ O_{\mu_\pi} &= \bar{c}_\nu (iD)^2 c_\nu, & O_{r_E} &= \bar{c}_\nu [(ivD), (iD_\mu)] [(ivD), (iD^\mu)] c_\nu, \\ O_{\mu_G} &= \bar{c}_\nu \sigma \cdot G c_\nu, & O_{s_B} &= \bar{c}_\nu [(iD_\mu), (iD_\alpha)] [(iD^\mu), (iD_\beta)] (-i\sigma^{\alpha\beta}) c_\nu, \\ O_{\rho_D} &= \frac{1}{2} \bar{c}_\nu [iD^\mu, [ivD, iD_\mu]] c_\nu, & O_{s_E} &= \bar{c}_\nu [(ivD), (iD_\alpha)] [(ivD), (iD_\beta)] (-i\sigma^{\alpha\beta}) c_\nu, \\ O_{\delta\rho_D} &= \frac{1}{2} \bar{c}_\nu [iD^\mu, [(iD)^2, iD_\mu]] c_\nu, & O_{sq_B} &= \bar{c}_\nu [iD_\mu, [iD^\mu, [iD_\alpha, iD_\beta]]] (-i\sigma^{\alpha\beta}) c_\nu, \end{aligned} \quad (2-14)$$

¹精确至量纲七算符

其中, $\sigma \cdot G \equiv -i\sigma^{\mu\nu} (iD_\mu) (iD_\nu)$, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. 最终 $D \rightarrow X_s e^+ \nu$ 过程的半轻单举衰变宽度用该组局域算符的非微扰矩阵元参数化为

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(D \rightarrow X_s \ell \nu)}{\Gamma_0} = & \left(1 - 8\rho - 10\rho^2\right) \mu_3 + (-2 - 8\rho) \frac{\mu_G^2}{m_c^2} + 6 \frac{\tilde{\rho}_D^3}{m_c^3} \\ & + \frac{16}{9} \frac{r_G^4}{m_c^4} + \frac{32}{9} \frac{r_E^4}{m_c^4} - \frac{34}{3} \frac{s_B^4}{m_c^4} + \frac{74}{9} \frac{s_E^4}{m_c^4} + \frac{47}{36} \frac{s_{qB}^4}{m_c^4} + \frac{\tau_0}{m_c^3}, \end{aligned} \quad (2-15)$$

本文将讨论 D 介子半轻单举衰变过程中的物理可观测量的构造, 其依赖于这些局域算符的非微扰强子矩阵元; 与此同时, 从实验数据中抽取出相应物理可观测量的实验观测值, 与理论表达式一起进行全局拟合以期实现对局域算符非微扰强子矩阵元的拟合抽取; D 介子半轻衰变与非轻衰变的不同之处仅在于其 **Wilson** 系数不同, 因此本文关于局域算符非微扰强子矩阵元的拟合估计值可直接用于 D 介子衰变宽度的理论计算。

2.4 本章回顾

本章对粒子物理标准模型和量子色动力学进行简单介绍, 此外, 对量子色动力学的两种近似对称性 (手征对称性和重夸克对称性) 进行讨论, 基于重夸克对称性, 讨论了重夸克有效理论和基于重夸克有效理论的算符乘积展开, 最终衰变宽度可以用一组局域算符的非微扰矩阵元进行参数化。这是本文对 D 介子进行系统性研究的理论基础。

第三章 粲介子半轻单举衰变的理论研究

本章从幂次修正和微扰修正两方面介绍本研究的相关工作：对于幂次修正，本文详细讨论了树图水平上量纲三与量纲五算符对应 Wilson 系数的匹配与相空间解析积分。对于微扰修正，本文讨论了单圈水平上领先幂次修正的解析积分，并给出电子能谱的解析形式。此外简单介绍了高量纲算符的参数化方案。

3.1 幂次修正

3.1.1 B 介子半轻单举衰变

本节以 $b \rightarrow c$ 和 $b \rightarrow u$ 过程为例，讨论树图水平上量纲三与量纲五算符对应 Wilson 系数匹配和相空间解积分，可得 $b \rightarrow c$ 和 $b \rightarrow u$ 衰变过程的电子能谱和衰变宽度。

$b \rightarrow c\ell\nu$ 过程的弱有效哈密顿为 [55]

$$\mathcal{H}_W = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{CKM} (\bar{q}\gamma_L^\mu c) (\bar{\nu}_\ell \gamma_{L\mu} \ell) = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{CKM} J_q^\mu J_{\ell\mu}, \quad (3-1)$$

其中, $\gamma_L^\mu = \gamma^\mu P_L$, $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ 是左手投影算符, G_F 是费米常数, V_{CKM} 是相关的 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) 矩阵元模方, J_q^μ and J_ℓ^μ 分别是强子和轻子流。基于洛伦兹对称性和宇称-电荷共轭对称性, 强子流对应振幅模方¹可以用一组基底进行展开,

$$W_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} W_1 + v_\alpha v_\beta W_2 - i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} v^\mu q^\nu W_3 + q_\alpha q_\beta W_4 + (v_\alpha q_\beta + v_\beta q_\alpha) W_5, \quad (3-2)$$

其中, p_{ν_e} , p_e , v , q 分别是反电子中微子, 电子, 轻子对的动量和 \bar{B} 介子速度。 W_j 是 q^2 和 $v \cdot q$ 的实函数²。

强子张量定义如下,

$$W_{\alpha\beta} = \sum_{X_c} (2\pi)^3 \delta^4(p_B - q - p_{X_c}) \frac{1}{2m_B} \times \langle \bar{B}(p_B) | J_{L\alpha}^\dagger | X_c(p_{X_c}) \rangle \langle X_c(p_{X_c}) | J_{L\beta} | \bar{B}(p_B) \rangle. \quad (3-3)$$

¹ 轻子流对应振幅模方是 $L^{\alpha\beta} = 2 \left(p_e^\alpha p_{\nu_e}^\beta + p_e^\beta p_{\nu_e}^\alpha - g^{\alpha\beta} p_e \cdot p_{\nu_e} - i\epsilon^{\eta\beta\lambda\alpha} p_{e\eta} p_{\nu_e\lambda} \right)$

² 计算 $W_j(q^2, v \cdot q)$ 关于 $v \cdot q$ 的积分时, 需将 $W_j(q^2, v \cdot q)$ 解析延拓到 $v \cdot q$ 复平面, 对应地复变函数是 $T_j(q^2, v \cdot q)$

将强子张量和轻子张量进行洛伦兹指标缩并并经过适当的相空间积分, \bar{B} 介子半轻单举衰变宽度为:

$$\begin{aligned} & \frac{d\Gamma}{dq^2 dE_{\bar{\nu}_e} dE_e} \\ &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_b^5}{2\pi^3} \left[W_1 q^2 + W_2 \left(2E_e E_{\bar{\nu}_e} - q^2/2 \right) + W_3 q^2 (E_e - E_{\bar{\nu}_e}) \right] \theta(4E_e E_{\bar{\nu}_e} - q^2). \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中, $W_i, i=1,2,3$ 是 \bar{B} 介子的标量结构函数。通过完整理论和有效理论之间对 W_i 进行匹配可得 Wilson 系数, 随后对运动学变量进行解析积分可得 \bar{B} 介子半轻单举衰变过程的电子能谱, 衰变宽度和各种物理观测量。

在微扰论领头阶, 考虑强子流的编时乘积

$$T_{\alpha\beta} = -i \int d^4x e^{-iq \cdot x} \frac{\langle \bar{B}(p_B) | T [J_{L\alpha}^\dagger(x) J_{L\beta}(0)] | \bar{B}(p_B) \rangle}{2m_B}. \quad (3-5)$$

在流的编时乘积中插入一组完备正交末态集 $\sum |X\rangle \langle X|$, 强子流¹ 跃迁至两个末态², 分别是 X_c 和 $X_{bb\bar{c}}$ 。以 X_c 为例, 这里的投影指的是 $\langle X|c\rangle = \langle X_c|$, 类似地, $\langle X|bb\bar{c}\rangle = \langle X_{bb\bar{c}}|$ 。基于 Heaviside-Theta 函数的积分表示³, 并结合场的平移算符, 对 x 和 ω 进行积分可得:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{X_c} \frac{\langle \bar{B} | J_{L\alpha}^\dagger | X_c \rangle \langle X_c | J_{L\beta} | \bar{B} \rangle}{2m_B (m_B - E_X - q^0 + i\varepsilon)} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{p}_X). \quad (3-6)$$

类似的, 式(3-6)同样可以用一组基底进行展开,

$$T_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} T_1 + v_\alpha v_\beta T_2 - i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} v^\mu q^\nu T_3 + q_\alpha q_\beta T_4 + (v_\alpha q_\beta + v_\beta q_\alpha) T_5. \quad (3-7)$$

基于算符乘积展开, 当 $x \sim 0$ 时该非局域流算符的编时乘积在可以用一组局域算符进行级数展开, 即

$$T[J_{L\alpha}^\dagger(x) J_{L\beta}(0)] = \sum C^n(x) \mathcal{O}_n(0), \quad (3-8)$$

其中 Wilson 系数可以通过量子场论微扰论进行逐阶微扰展开。从 QCD 费曼规则出发, 强子流编时乘积在微扰论的领头阶有:

$$\bar{u} \frac{1}{(m_b v - q + k)^2 - m_c^2 + i\varepsilon} \gamma_\alpha P_L (m_b \not{p} - \not{q} + \not{k}) \gamma_\beta P_L u, \quad (3-9)$$

¹在夸克层次上, $J_{L\beta}(0) |\bar{B}\rangle = \bar{c} \gamma_\beta P_L b |\bar{B}\rangle$ 表示湮灭初态 b 夸克, 产生末态 c 夸克; $J_{L\alpha}^\dagger(0) |\bar{B}\rangle = \bar{b} \gamma_\alpha P_R c |\bar{B}\rangle$ 对应于产生 \bar{c} 夸克和两个 b 夸克 (多粒子直积态), 这些态和完备末态集进行投影, 挑选出 X_c 和 $X_{bb\bar{c}}$

² $X_{bb\bar{c}}$ 被能量守恒定律所禁戒。

³ $\theta(x^0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega x^0}}{\omega + i\varepsilon}$

其中, m_b, m_c 是底夸克和粲夸克质量, k 是底夸克的离壳动量 ($k \sim \Lambda_{\text{QCD}}$)。对 $\frac{k}{m_b}$ 在零附近进行泰勒展开, 领先幂次的结果是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_0} \bar{u} \left[(m_b v - q)_\alpha \gamma_\beta + (m_b v - q)_\beta \gamma_\alpha - (m_b \not{v} - \not{q}) g_{\alpha\beta} \right. \\ & \quad \left. - i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} (m_b v - q)^\lambda \gamma^\eta \right] P_L u, \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中, $\Delta_0 = (m_b v - q)^2 - m_c^2 + i\varepsilon$ 。底夸克之间的量纲三算符包括 $\bar{b}\gamma^\mu b$ 和 $\bar{b}\gamma^\mu \gamma^5 b$, 前者的零分量对应底夸克数算符, 后者的贡献由于强相互作用中宇称守恒所禁戒。此外领先幂次的水平上有效粲夸克场和完整粲夸克场之间仅存在一个指数形式因子的差别, 没有 $1/m_b$ 的幂次修正。

$$T_{\alpha\beta}^0 = (-g_{\alpha\beta}) (m_b - q \cdot v) \frac{1}{2\Delta_0} + v_\alpha v_\beta \frac{m_b}{\Delta_0} - i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} v^\lambda q^\eta \frac{1}{2\Delta_0} + \dots, \quad (3-11)$$

与 $T_{\alpha\beta}$ 的一般形式进行匹配可得:

$$T_1^{(0)} = \frac{1}{2\Delta_0} (m_b - q \cdot v) \quad T_2^{(0)} = \frac{1}{\Delta_0} m_b \quad T_3^{(0)} = \frac{1}{2\Delta_0}. \quad (3-12)$$

某个衰变过程的衰变宽度与其向前散射振幅的虚部相关, $-\frac{1}{\pi} \text{Im} T_j = W_j$ (仅考虑左手割线)。利用¹

$$\frac{1}{\omega + i\varepsilon} = P \frac{1}{\omega} - i\pi \delta(\omega), \quad (3-13)$$

可得:

$$\begin{aligned} W_1^{(0)} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q \cdot v}{m_b} \right) \delta \left[v \cdot q - \left(\frac{q^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_b} \right) \right], \\ W_2^{(0)} &= \frac{1}{2} \delta \left[v \cdot q - \left(\frac{q^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_b} \right) \right], \\ W_3^{(0)} &= \frac{1}{4m_b} \delta \left[v \cdot q - \left(\frac{q^2 + m_b^2 - m_c^2}{2m_b} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3-14)$$

次领先幂次的结果为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_0} \bar{u} \left(k_\alpha \gamma_\beta + k_\beta \gamma_\alpha - g_{\alpha\beta} \not{k} - i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} k^\lambda \gamma^\eta \right) P_L u \\ & - \frac{2k \cdot (m_b v - q)}{\Delta_0^2} \bar{u} \left[(m_b v - q)_\alpha \gamma_\beta + (m_b v - q)_\beta \gamma_\alpha \right. \\ & \quad \left. - (m_b \not{v} - \not{q}) g_{\alpha\beta} - i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} (m_b v - q)^\lambda \gamma^\eta \right] P_L u. \end{aligned} \quad (3-15)$$

式(3-15)中出现新算符是 $\bar{b}(\gamma_\lambda i D_\tau - m_b v_\tau) b$ 和 $\bar{b}(\gamma_\lambda \gamma_5 i D_\tau - m_b v_\tau) b$, 在粲夸克场做 $1/m_b$ 展开的领先幂次水平上, 这两个算符最终是 $\bar{b}_v \gamma_\lambda i D_\tau b_v$ 和 $\bar{b}_v \gamma_\lambda \gamma_5 i D_\tau b_v$, 对于

¹其中 P 指的是主值。

前者，由于重夸克有效理论中重夸克场幂次展开的领头阶拉格朗日方程 $iv \cdot D = 0$ 的约束，其贡献被禁戒；对于后者，由于强相互作用中电荷宇称守恒的约束，其贡献也为 0 (量纲四算符的非微扰矩阵元贡献为 0)。

量纲五算符存在三个来源。首先次领头幂次的结果中若重夸克场幂次展开到线性项，则会包含量纲五算符的贡献；其次，次次领头幂次的修正同样会包含量纲五算符的贡献；最后，由于粲夸克之间色磁算符对应矩阵元的量纲为五，因此在树图水平上讨论单胶子发射图对量纲五算符修正的贡献是必要的¹。

考虑底夸克场的幂次展开，

$$b(x) = e^{-im_b v \cdot x} \left(1 + \frac{i \not{D}}{2m_b} \right) b_v(x), \quad (3-16)$$

对应拉格朗日量的幂次修正项为：

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{b}_v \frac{D^2}{2m_b} b_v - \bar{b}_v g \frac{G_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}}{4m_b} b_v. \quad (3-17)$$

以 $\bar{b} \gamma_\lambda (iD_\tau - m_b v_\tau) b$ 为例，其在微扰论意义上的完整形式是：

$$\begin{aligned} \{\bar{b} \gamma_\lambda (iD_\tau - m_b v_\tau) b\} e^{\int \mathcal{L}_1 d^4x} &= \bar{b}_v \gamma_\lambda iD_\tau b_v + i \int d^4x T [\bar{b}_v \gamma_\lambda iD_\tau b_v(0) \mathcal{L}_1(x)] \\ &\quad + \bar{b}_v \left(\frac{-i \not{D}}{2m_b} \right) \gamma_\lambda iD_\tau b_v + \bar{b}_v \gamma_\lambda iD_\tau \frac{i \not{D}}{2m_b} b_v + \dots, \end{aligned} \quad (3-18)$$

式(3-18)的左边是底夸克场之间流算符，右边第二项表示了重夸克有效理论拉格朗日量的次领头幂次对该流算符的修正。右边的其余部分是底夸克场幂次展开到线性项所引入的修正。

重夸克有效理论中的传播子方程为 $iv \cdot D S_h(x-y) = \delta(x-y)$ ，最终可以基于非微扰参数 λ_1 和 λ_2 参数化式(3-15)，其中

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= -\langle \bar{\mathbf{B}} | \bar{Q}_{v_r} D_\perp^2 Q_{v_r} | \bar{\mathbf{B}} \rangle, \\ 16(\mathbf{S}_b \cdot \mathbf{S}_\ell) \lambda_2(m_c) &= \langle \bar{\mathbf{B}} | \bar{Q}_{v_r} g \sigma_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} Q_{v_r} | \bar{\mathbf{B}} \rangle. \end{aligned} \quad (3-19)$$

其中 $|\bar{\mathbf{B}}\rangle$ 是渐进 HQET 态， \bar{Q}_{v_r} 是有效重夸克场， \mathbf{S}_b 和 \mathbf{S}_ℓ 分别是 $\bar{\mathbf{B}}$ 介子中底夸克和轻夸克的自旋矢量。整理结果可得：

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &= -\frac{1}{2m_b} (\lambda_1 + 3\lambda_2) \left\{ \frac{1}{6\Delta_0} - \frac{(m_b - q \cdot v)^2}{\Delta_0^2} + \frac{2}{3} \frac{[q^2 - (q \cdot v)^2]}{\Delta_0^2} \right\}, \\ T_2^{(1)} &= -\frac{1}{2m_b} (\lambda_1 + 3\lambda_2) \left[\frac{5}{3\Delta_0} - \frac{2m_b(m_b - v \cdot q)}{\Delta_0^2} + \frac{4}{3} \frac{m_b v \cdot q}{\Delta_0^2} \right], \\ T_3^{(1)} &= \frac{1}{2m_b} (\lambda_1 + 3\lambda_2) \frac{5}{3} \left(\frac{m_b - v \cdot q}{\Delta_0^2} \right). \end{aligned} \quad (3-20)$$

¹在树图水平上，存在一种收缩方式使得色磁算符矩阵元贡献非零，即单胶子发射

考虑次次领先幂次的结果,

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{k \cdot (m_b v - q)}{\Delta_0^2} \bar{u} \left(k_\alpha \gamma_\beta + k_\beta \gamma_\alpha - g_{\alpha\beta} \not{k} - i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} k^\lambda \gamma^\eta \right) P_L u \\
& + \left\{ \frac{4 [k \cdot (m_b v - q)]^2}{\Delta_0^3} - \frac{k^2}{\Delta_0^2} \right\} \bar{u} \left[(m_b v - q)_\alpha \gamma_\beta + (m_b v - q)_\beta \gamma_\alpha \right. \\
& \left. - (m_b \not{v} - \not{q}) g_{\alpha\beta} - i \epsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} (m_b v - q)^\lambda \gamma^\eta \right] P_L u.
\end{aligned} \tag{3-21}$$

新出现算符包括:

$$\begin{aligned}
& \bar{b} \gamma^\lambda (iD - m_b v)^{(\alpha} (iD - m_b v)^{\beta)} b, \\
& \bar{b} \gamma^\lambda \gamma_5 (iD - m_b v)^{(\alpha} (iD - m_b v)^{\beta)} b.
\end{aligned}$$

前者可以被 λ_1 参数化而后者贡献由于强相互作用中宇称守恒所禁戒。整理可得:

$$\begin{aligned}
T_1^{(2)} &= \frac{1}{6} \lambda_1 (m_b - v \cdot q) \left\{ \frac{4}{\Delta_0^3} [q^2 - (v \cdot q)^2] - \frac{3}{\Delta_0^2} \right\}, \\
T_2^{(2)} &= \frac{1}{3} \lambda_1 m_b \left\{ \frac{4}{\Delta_0^3} [q^2 - (v \cdot q)^2] - \frac{3}{\Delta_0^2} - \frac{2v \cdot q}{m_b \Delta_0^2} \right\}, \\
T_3^{(2)} &= \frac{1}{6} \lambda_1 \left\{ \frac{4}{\Delta_0^3} [q^2 - (v \cdot q)^2] - \frac{5}{\Delta_0^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{3-22}$$

此外, 对来源于 \mathcal{L}_1 修正的单胶子发射图, 以胶子动量 p 为展开参数, p 的线性项贡献可以被 λ_2 参数化, 可得:

$$T_1^{(g)} = \lambda_2 \frac{(m_b - v \cdot q)}{2\Delta_0^2}, \quad T_2^{(g)} = -\lambda_2 \frac{m_b}{\Delta_0^2}, \quad T_3^{(g)} = \lambda_2 \frac{1}{2\Delta_0^2}. \tag{3-23}$$

树图水平上量纲五算符对应的结构函数包括:

$$T_j = T_j^{(1)} + T_j^{(2)} + T_j^{(g)}.$$

微分衰变宽度中的 W_i 是 T_i 的虚部, 基于

$$-\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\frac{1}{\Delta_0} \right)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)} [(m_b v - q)^2 - m_c^2].$$

可得树图水平上量纲三算符和量纲五算符非微扰矩阵元对应的 Wilson 系数, 这是本文对相空间积分以得到电子能谱和物理可观测量的基础。

运动学分析

从树图阶的三微分衰变宽度出发, 经过两重解析积分可得电子能谱的理论结果。

1. 中微子能量的积分区域 在初态底夸克质心系中 (z 轴正方向是虚 W^* 的飞行方向), 中微子能量的表达式是

$$E_\nu = \frac{q^2}{2E_e(1 - \cos\theta)},$$

其中 θ 是中微子与电子动量方向的夹角, 中微子积分区域的下限是 $q^2/(4E_e)$, 对应电子和电子中微子反向飞行¹ ($\theta = \pi$)。物理区域的上限由末态强子 H_c 在壳条件决定, 即 $\frac{m_B^2 + q^2 - m_D^2}{2m_B} - E_e$,

$$\int_{\frac{q^2}{4E_e}}^{\frac{m_B^2 + q^2 - m_D^2}{2m_B} - E_e} \frac{d\Gamma}{dq^2 dE_e dE_{\nu_e}} dE_{\nu_e} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dq^2 dE_e dE_{\nu_e}} \theta(4E_e E_{\nu_e} - q^2) dE_{\nu_e}. \quad (3-24)$$

式(3-24)等号右侧被积函数的完整形式是

$$\frac{d\Gamma}{dq^2 dE_e dE_{\nu_e}} \theta(4E_e E_{\nu_e} - q^2) \theta\left(\frac{m_B^2 + q^2 - m_D^2}{2m_B} - E_e - E_{\nu_e}\right), \quad (3-25)$$

如图3-1所示, 绿色曲面是 E_ν 的积分下限, 蓝色曲面是 E_ν 的积分上限, 橙色曲面是粲夸克传播子给出的狄拉克 δ 函数对中微子能量的约束。这里 $m_b = 4.18\text{GeV}$, $m_c = 1.27\text{GeV}$, $m_{\bar{B}} = 5.28\text{GeV}$, $m_D = 1.86\text{GeV}$ 。粲夸克传播子给出的狄拉克 δ 函数对中微子能量的约束曲面位于中微子能量的物理区域以内。因此第二个 Heavside-Theta 函数天然满足²。

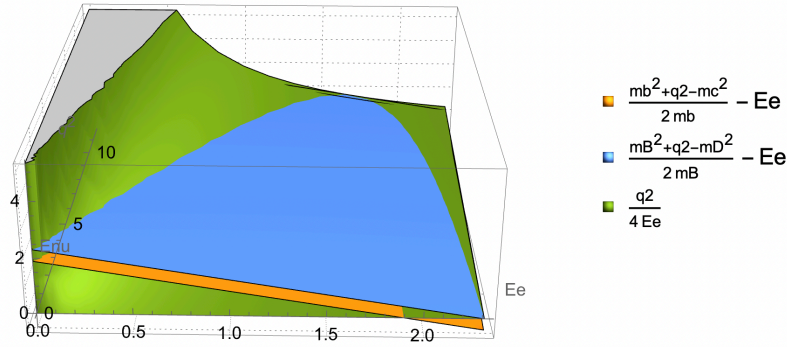


图 3-1 中微子能量积分区域

完成 E_ν 积分后, 整体留下 Heavside-Theta 函数为:

$$\theta(4E_e E_{\nu_e} - q^2) \rightarrow \theta\left(\frac{m_b^2 + q^2 - m_c^2}{2m_b} - E_e - \frac{q^2}{4E_e}\right). \quad (3-26)$$

¹背对背飞行并不意味着 $\vec{p}_e + \vec{P}_\nu = 0$ 。事实上, 忽略电子质量并结合电子在壳条件, $|\vec{p}_e| = E_e$ 并非 $|\vec{p}_{e_z}| = E_e$ 。

²物理区域的上限并非实际积分上限 (实际的积分上限由 Heavside-Theta 函数给出), 两者的差别反映了强子和夸克之间的差异。

将 Heavside-Theta 函数无量纲化, 可得双微分衰变宽度如下:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\hat{q}^2 dy} = & \frac{G_F^2 m_c^5 |V_{cb}|^2}{192\pi^3} \left\{ \theta(z) \left[12(y - \hat{q}^2)(1 + \hat{q}^2 - \rho - y) \right. \right. \\ & - \frac{2\lambda_1}{m_c^2} (4\hat{q}^2 - 4\hat{q}^2\rho + 4\hat{q}^4 - 3y + 3\rho y - 6\hat{q}^2 y) \\ & - \frac{6\lambda_2}{m_c^2} (-2\hat{q}^2 - 10\hat{q}^2\rho + 10\hat{q}^4 - y + 5\rho y - 10\hat{q}^2 y) \left. \right] \\ & + \frac{\delta(z)}{y^2} \left[-\frac{2\lambda_1}{m_c^2} (2\hat{q}^6 + \hat{q}^4 y^2 - 3\hat{q}^2 y^3 - \hat{q}^2 y^4 + y^5) \right. \\ & - \frac{6\lambda_2}{m_c^2} \hat{q}^2 (\hat{q}^2 - y)(5\hat{q}^2 - 8y + y^2) \left. \right] \\ & \left. + \frac{\delta'(z)}{y^3} \left[-\frac{2\lambda_1}{m_c^2} \hat{q}^2 (y^2 - \hat{q}^2)^2 (y - \hat{q}^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3-27)$$

其中, $y = \frac{2E_c}{m_b}$, $\hat{q}^2 = \frac{q^2}{m_b^2}$, $\rho = \frac{m_c^2}{m_b^2}$ $z = 1 + \hat{q}^2 - \rho - \hat{q}^2/y - y$ 。

2. 轻子对不变质量平方的积分区域 $b \rightarrow c$ 跃迁过程中, 轻子对不变质量平方满足 $q^2 \leq 4E_c E_{\nu_c}$, 同时在强子层次

$$\begin{aligned} p_{X_c}^2 &= (p_B - q)^2 \\ &= m_B^2 - 2(E_c + E_{\nu_c})m_B + q^2. \end{aligned} \quad (3-28)$$

末态强子 H_c 在壳约束可得 E_{ν} 对 q^2 的依赖, 结合 $q^2 \leq 4E_c E_{\nu_c}$ 可得 $0 < q^2 < \frac{2E_c}{(m_B - 2E_c)} (m_B^2 - 2E_c m_B - m_D^2)$, Heavside-Theta 函数在夸克水平上, 对 q^2 产生更严格的约束。 $\theta(z)$ 给出的约束, 即 $1 + q^2 - \rho - \frac{q^2}{y} - y \geq 0$ 。

对中微子能量做分部积分带来新的狄拉克 δ 函数也会给出关于 q^2 位于物理边界以内的约束曲面。因此不必对轻子对不变质量平方引入额外的 Heavside-Theta 函数进行解析延拓。对 q^2 的积分完成之后, 会整体留下 $\theta(1 - \rho - y)$ 。对于狄拉克 δ 函数以及其导函数相关的项, 注意:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) = 1, \int_0^1 \delta(x - x_0) = \theta(x_0)\theta(1 - x_0). \quad (3-29)$$

以双微分衰变宽度中的 $\delta(z)$ 项为例,

$$\int_0^{\frac{2E_c}{m_D - 2E_c} (m_D^2 - 2E_c m_D - m_D^2)} \delta\left(q^2 - \frac{y(1 - \rho - y)}{1 - y}\right) dq^2 = \theta(1 - \rho - y). \quad (3-30)$$

对 q^2 积分后可得到 $b \rightarrow c$ 过程电子能谱为：

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dy} = & \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{bc}|^2}{192\pi^3} \left\{ \left[2(3-2y)y^2 - 6y^2\rho - \frac{6y^2\rho^2}{(1-y)^2} + \frac{2(3-y)y^2\rho^3}{(1-y)^3} \right] \right. \\ & - \frac{2\lambda_1}{m_b^2} \left[-\frac{5}{3}y^3 - \frac{y^3(5-2y)\rho^2}{(1-y)^4} + \frac{2y^3(10-5y+y^2)\rho^3}{3(1-y)^5} \right] \\ & - \frac{6\lambda_2}{m_b^2} \left[-y^2\frac{(6+5y)}{3} + \frac{2y^2(3-2y)\rho}{(1-y)^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{3y^2(2-y)\rho^2}{(1-y)^3} - \frac{5y^2(6-4y+y^2)\rho^3}{3(1-y)^4} \right] \right\} \theta(1-\rho-y). \end{aligned} \quad (3-31)$$

在电子能量的端点处，式(3-31)出现严重发散¹，为了处理类似的发散，尝试对端点处的奇异项进行重求和，具有模型依赖的形状函数（shape function）被引入。此外从模型无关的角度出发可以对电子能谱进行加权积分²，获得衰变宽度，电子能量矩等多种物理可观测量。

3. 电子能量的积分区域 末态强子 H_c 的在壳对 q^2 的约束为

$$0 < q^2 < \frac{2E_c}{(m_B - 2E_c)} (m_B^2 - 2E_c m_B - m_D^2).$$

q^2 等于零点处的电子能量具有最大值为：

$$E_e^{\max} = \frac{m_B^2 - m_D^2}{2m_B}.$$

此外，

$$E_e = \frac{m_B^2 - m_D^2 - q^2}{2m_B} - E_{\nu_e}. \quad (3-32)$$

当 X_q 是最轻的含粲强子且 $q^2 = 0, E_\nu = 0$ ，电子能量具有最大值。

电子能谱中的 Heavside-Theta 函数给出夸克跃迁水平上电子能量的约束 $y \in [0, 1-\rho]$ 。显然 Heavside-Theta 函数给出的约束比强子层次上的约束更严格。对电子能量做积分可得衰变宽度为：

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{bc}|^2}{192\pi^3} \left[\left(1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln \rho \right) \right. \\ & + \frac{\lambda_1}{2m_b^2} \left(1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln \rho \right) \\ & \left. - \frac{3\lambda_2}{2m_b^2} \left(3 - 8\rho + 24\rho^2 - 24\rho^3 + 5\rho^4 + 12\rho^2 \ln \rho \right) \right]. \end{aligned} \quad (3-33)$$

¹在电子能量的端点处，算符乘积展开失效，这个区域 HQET 的展开参数不再是一个小量，形式上表现为 3-31 中出现的发散项

²积分可以抹平（smearing）被积函数的奇异性。

上式等号右边的第一行是衰变宽度的领先幂次贡献，对应与自由夸克水平的跃迁。当 $\rho \rightarrow 0$ 且电子能量位于端点区域时，式(3-31)中存在发散项为：

$$g_\rho(y) = \frac{\rho^{n-1}}{(1-y)^n} \theta(1-\rho-y), \quad n=1,2,3,\dots \quad (3-34)$$

真实物理过程的 $\rho \neq 0$ 。本文通过研究 $g_\rho(y)$ 在极限情况下的渐近行为以分析电子能谱发散行为。本文用 $\rho = 0.1, 0.05, 0.01, 0.0001$ 为例，分析 $g_\rho(y) (n=3)$ 的渐近

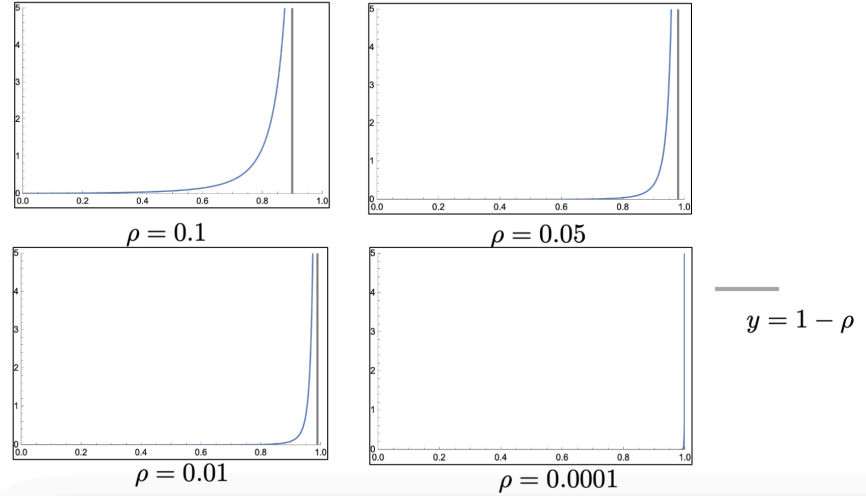


图 3-2 $b \rightarrow u$ 过程中电子能谱发散项的渐近行为

行为。从图3-2可知， $g_\rho(y) (n=3)$ 在 $y = 1 - \rho$ 处发散，且发散行为处于渐近线的左侧。此外本文用光滑函数 $t(y)$ 测试 $g_\rho(y)$ 的积分行为，

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{1-\rho} dy t(y) g_\rho(y) &= \frac{1}{(n-1)} \left[t(1) - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{1-\rho} dy \frac{dt}{dy}(y) \frac{\rho^{n-1}}{(1-y)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{(n-1)} t(1). \end{aligned} \quad (3-35)$$

式(3-35)等号右边侧的第二项交换极限取积分次序，则被积函数等于零。最终 $g_\rho(y)$ 可被等效为：

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{n-1}}{(1-y)^n} \theta(1-\rho-y) &= \frac{1}{(n-1)} \delta(1^- - y) \theta(1-y) = \frac{1}{(n-1)} \delta(1-y) \theta(1^+ - y), \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{n-1}}{(1-y)^{n+1}} \theta(1-\rho-y) &= -\frac{1}{(n-1)} \delta'(1-y) \theta(1^+ - y). \end{aligned} \quad (3-36)$$

式(3-36)中， 1^+ 表示该值位于 1 的右侧领域， 1^- 表示该值位于 1 的左侧领域，结

果表明 δ 函数位于电子能量的积分区域。 $b \rightarrow u$ 过程电子能谱为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{dy} = & \left\{ 2(3-2y)y^2\theta(1-y) \right. \\ & - \frac{2\lambda_1}{m_b^2} \left[-\frac{5}{3}y^3\theta(1-y) + \frac{1}{6}\delta(1-y)\theta(1^+-y) + \frac{1}{6}\delta'(1-y)\theta(1^+-y) \right] \\ & \left. - \frac{2\lambda_2}{m_b^2} \left[-y^2(6+5y)\theta(1-y) + \frac{11}{2}\delta(1-y)\theta(1^+-y) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中, $\Gamma_0 = \frac{|V_{ub}|^2 G_F^2 m_b^5}{192\pi^3}$ 。

3.1.2 第二种参数化方案

Andrea Albertia, Thorsten Ewerthb, 等人在单圈水平上讨论了量纲五算符非微扰矩阵元对结构函数的修正 [56]。他们采用了一组新的运动学变量对相空间进行参数化。定义如下，

$$\hat{u} = \frac{(p-q)^2 - m_c^2}{m_b^2}, \quad \hat{q}^2 = \frac{q^2}{m_b^2}, \quad \hat{E}_e = \frac{E_e}{m_b}. \quad (3-38)$$

式(3-38)中, \hat{u} 是中间传播子的离壳度, 在树图水平上 $\hat{u} = 0$ 。

作为过渡, 本节在树图水平上讨论包含量纲三算符和量纲五算符修正的电子能谱。一方面与上节结果进行交叉检验; 另一方面, 本文在单圈水平上讨论量纲三算符对 $D \rightarrow Xe^+ \nu_e$ 过程电子能谱的修正奠定必要的基础。

衰变宽度关于无量纲化电子能量、轻子对转移动量平方和传播子离壳度的微分衰变宽度为：

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_\ell d\hat{q}^2 d\hat{u}} = & \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{cb}|^2}{16\pi^3} \theta \left[\frac{1}{2} (1 - \rho + \hat{q}^2 - \hat{u}) - E_e - \frac{\hat{q}^2}{4E_e} \right] \\ & \times \left\{ \hat{q}^2 W_1 - \left[2\hat{E}_\ell^2 - 2\hat{E}_\ell \hat{q}_0 + \frac{\hat{q}^2}{2} \right] W_2 + \hat{q}^2 (2\hat{E}_\ell - \hat{q}_0) W_3 \right\}, \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中的标量结构函数可以进行强相互作用耦合常数的微扰展开和底夸克质量负幂次的幂次展开：

$$W_i = W_i^{(0)} + \frac{\mu_\pi^2}{2m_b^2} W_i^{(\pi,0)} + \frac{\mu_G^2}{2m_b^2} W_i^{(G,0)} + \frac{C_F \alpha_s}{\pi} \left[W_i^{(1)} + \frac{\mu_\pi^2}{2m_b^2} W_i^{(\pi,1)} + \frac{\mu_G^2}{2m_b^2} W_i^{(G,1)} \right] + \dots$$

本节忽略高阶修正仅考虑树图水平贡献。其中树图水平上的结构函数 $W_i, i=1,2,3$ 为：

$$W_i^{(0)} = w_i^{(0)} \delta(\hat{u}); \quad w_1^{(0)} = 2E_0, \quad w_2^{(0)} = 4, \quad w_3^{(0)} = 2.$$

树图水平上量纲五算符 (动力学算符) 对应的的结构函数 $W_i^{(\pi,0)}, i=1,2,3$ 如下所示：

$$W_i^{(\pi,0)} = w_i^{(\pi,0)} \delta(\hat{u}) + w_i^{(\pi,1)} \delta'(\hat{u}) + w_i^{(\pi,2)} \delta''(\hat{u}), \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned}
w_1^{(\pi,0)} &= \frac{8}{3}(1-E_0), & w_1^{(\pi,1)} &= \frac{4}{3}E_0(1-E_0), & w_1^{(\pi,2)} &= \frac{2}{3}E_0\lambda_0, \\
w_2^{(\pi,0)} &= 0, & w_2^{(\pi,1)} &= -8(1-E_0), & w_2^{(\pi,2)} &= \frac{4}{3}\lambda_0, \\
w_3^{(\pi,0)} &= -2, & w_3^{(\pi,1)} &= -\frac{4}{3}(1-E_0), & w_3^{(\pi,2)} &= \frac{2}{3}\lambda_0,
\end{aligned}$$

树图水平上量纲五算符(色磁算符)对应的结构函数 $W_i^{(G,0)}, i=1,2,3$ 如下所示:

$$W_i^{(G,0)} = w_i^{(G,0)}\delta(\hat{u}) + w_i^{(G,1)}\delta'(\hat{u}); \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned}
w_1^{(G,0)} &= -\frac{4}{3}(2-5E_0), & w_1^{(G,1)} &= -\frac{4}{3}\left(E_0+3E_0^2+\frac{1}{2}\lambda_0\right); \\
w_2^{(G,0)} &= 0, & w_2^{(G,1)} &= \frac{8}{3}(3-5E_0); \\
w_3^{(G,0)} &= \frac{10}{3}, & w_3^{(G,1)} &= -\frac{4}{3}(1+5E_0).
\end{aligned}$$

其中, $E_0 = \frac{1}{2}(1+\rho-\hat{q}^2)$, $\lambda_0 = 4(E_0^2-\rho)$.

对于 (E_e, E_{ν_e}, q^2) 这组运动学变量, E_{ν_e} 的下限是 $\frac{\hat{q}^2}{4E_e}$. 当固定 E_e, q^2 , 中间传播子离壳度 \hat{u} 与中微子能量 E_{ν_e} 存在一一对应的关系。即

$$\hat{u} = 1 + \hat{q}^2 - \rho - 2(\hat{E}_e + \hat{E}_{\nu_e}).$$

\hat{u} 的运动学区域的上限是 $(1-\rho+\hat{q}^2)-2\hat{E}_e-\frac{\hat{q}^2}{2E_e}$, 类似地, 引入

$$\theta\left[\frac{1}{2}(1-\rho+\hat{q}^2-\hat{u})-E_e-\frac{\hat{q}^2}{4E_e}\right],$$

将对积分区域解析延拓到正无穷, 这是式(3-39)中 Heavside-theta 项。

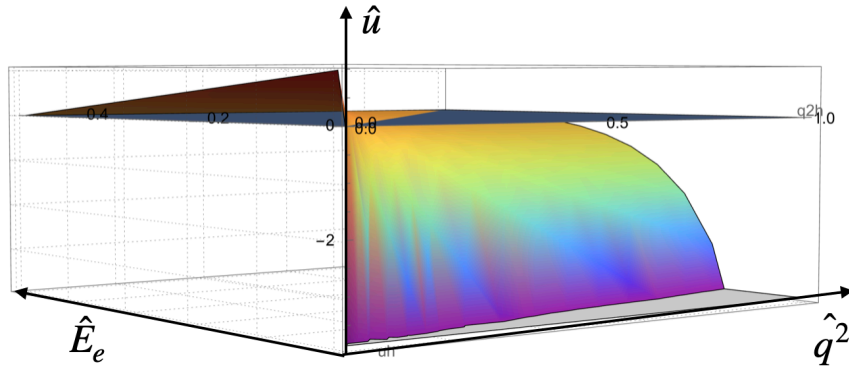


图 3-3 中间传播子离壳度的积分区域

完成对 \hat{u} 的积分¹, Heavside-Theta 函数变成 $\theta\left(\frac{(4\hat{E}_e-2(1-\rho))\hat{E}_e}{2\hat{E}_e-1}\right)$, 这将给出关于

¹ \hat{q}^0 表示无量纲化的中微子能量和电子能量之和, 这时 $\hat{u} = 1 + \hat{q}^2 - \rho - 2\hat{q}^0$. 具体地, 树图水平对应于 $\hat{u}=0$, \hat{q}^0 是关于 \hat{u} 的函数, 在分部积分的过程中, $\hat{q}^0(\hat{u})$ 在零点关于 \hat{u} 的导数必须先在先对 $\hat{q}^0(\hat{u})$ 求导, 然后再取导函数在零点处的值。

\hat{q}^2 的积分区域, 完成对 \hat{q}^2 的积分之后, 可得了 $\bar{B} \rightarrow X_c e \nu$ 过程的电子能谱为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_e} = & \left\{ 16\hat{E}_e^2(3-4\hat{E}_e) - 48\hat{E}_e^2\rho - \frac{48\hat{E}_e^2\rho^2}{(1-2\hat{E}_e)^2} + \frac{16\hat{E}_e^2(3-2\hat{E}_e)\rho^3}{(1-2\hat{E}_e)^3} \right. \\ & - \frac{32\mu_\pi^2}{3m_b^2} \hat{E}_e^3 \left[5 + \frac{3(5-4\hat{E}_e)}{(1-2\hat{E}_e)^4} \rho^2 - \frac{4(2\hat{E}_e^2-5\hat{E}_e+5)}{(1-2\hat{E}_e)^5} \rho^3 \right] \\ & + \frac{32\mu_G^2}{3m_b^2} \hat{E}_e^2 \left[3 + 5\hat{E}_e + \frac{3(4\hat{E}_e-3)}{(1-2\hat{E}_e)^2} \rho - \frac{9(1-\hat{E}_e)}{(1-2\hat{E}_e)^3} \rho^2 + \frac{5(2\hat{E}_e^2-4\hat{E}_e+3)}{(1-2\hat{E}_e)^4} \rho^3 \right] \\ & \left. \right\} \theta\left(\frac{1-\rho}{2} - \hat{E}_e\right). \end{aligned} \quad (3-42)$$

整体会留下另一个 Heavside-Theta 函数 $\theta(\frac{1-\rho}{2} - \hat{E}_e)$ 对 \hat{E}_e 积分区域进行限制。关于无量纲化电子能量的积分, Heavside-Theta 函数给出的约束是 $\left[0, \frac{1-\rho}{2}\right]$, 最终可得 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程的衰变宽度为:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = & 1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln \rho \\ & - \mu_\pi^2 [1 - 8\rho + 8\rho^3 - \rho^4 - 12\rho^2 \ln \rho] \\ & + \mu_G^2 [3 - 8\rho + 24\rho^2 - 24\rho^3 + 5\rho^4 + 12\rho^2 \ln \rho], \end{aligned} \quad (3-43)$$

该结果与式(3-33)保持一致。

3.1.3 两种参数化方案之间的转换

为了方便两种参数化方案之间进行交叉检验, 本节讨论两种参数化方案下的结构函数、微分衰变宽度和衰变宽度之间的转换关系。

第一种参数化方案

\bar{B} 介子半轻单举衰变宽度为:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \int \frac{d^3\vec{p}_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{d^3\vec{p}_{X_c}}{(2\pi)^3 2E_{X_c}} \frac{d^3\vec{p}_{\nu_e}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_e}} \times \\ & \sum_{X_c} \sum_{\text{lepton spins}} \frac{|\langle X_c e \bar{\nu}_e | H_W | \bar{B} \rangle|^2}{2m_B} (2\pi)^4 \delta^4 [p_B - (p_e + p_{\nu_e}) - p_{X_c}], \end{aligned} \quad (3-44)$$

经过适当的相空间积分后, 可得三微分衰变宽度为:

$$\frac{d\Gamma}{dq^2 dE_e dE_{\nu_e}} = \frac{1}{4} \sum_{X_c} \sum_{\text{lepton spins}} \frac{|\langle X_c e \bar{\nu}_e | H_W | \bar{B} \rangle|^2}{2m_B} \delta^4 [p_B - (p_e + p_{\nu_e}) - p_{X_c}]. \quad (3-45)$$

其中,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{X_c} \sum_{\substack{\text{lepton} \\ \text{spins}}} \frac{|\langle X_c e \bar{\nu}_e | H_W | \bar{B} \rangle|^2}{2m_B} (2\pi)^3 \delta^4 [p_B - (p_e + p_{\nu_e}) - p_{X_c}] \\ & = 2G_F^2 |V_{cb}|^2 W_{\alpha\beta} L^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3-46)$$

其中有关强子张量 W' 的定义如下:

$$W'_{\alpha\beta} = \text{Im} \left(\frac{i}{2m_B \pi} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \bar{B} | T [J_{L\alpha}^\dagger(x) J_{L\beta}(0)] | \bar{B} \rangle \right) \quad (3-47)$$

在微扰论领头阶,

$$\begin{aligned} W'_{\alpha\beta} &= \sum_{X_c} (2\pi)^3 \delta^4(p_B - q - p_{X_c}) \frac{1}{2m_B} \\ &\quad \times \langle \bar{B}(p_B) | J_L^{\dagger\alpha} | X_c(p_{X_c}) \rangle \langle X_c(p_{X_c}) | J_L^\beta | \bar{B}(p_B) \rangle, \end{aligned} \quad (3-48)$$

基于洛伦兹对称性和电荷共轭对称性, 可将 $W'_{\alpha\beta}$ 分解为

$$m_b W'_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} m_b W'_1 + v_\alpha v_\beta m_b W'_2 - i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} v^\mu q^\nu m_b W'_3 + q_\alpha q_\beta m_b W'_4 + (v_\alpha q_\beta + v_\beta q_\alpha) m_b W'_5 \quad (3-49)$$

轻子张量约定为:

$$L^{\alpha\beta} = 2 \left(p_e^\alpha p_{\nu_e}^\beta + p_e^\beta p_{\nu_e}^\alpha - g^{\alpha\beta} p_e \cdot p_{\nu_e} - i\epsilon^{\eta\beta\lambda\alpha} p_{e\eta} p_{\nu_e\lambda} \right) \quad (3-50)$$

强子张量和轻子张量进行洛伦兹指标缩并之后, W_4 和 W_5 消失并可得三微分衰变宽度的表达式为:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dq^2 dE_e dE_{\nu_e}} &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2}{2\pi^3} \left[W'_1 q^2 + W'_2 \left(2E_e E_{\nu_e} - \frac{q^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + W'_3 q^2 (E_e - E_{\nu_e}) \right] \theta(4E_e E_{\nu_e} - q^2) \end{aligned} \quad (3-51)$$

对上式做无量纲化处理¹,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\hat{q}^2 d\hat{E}_e d\hat{E}_{\nu_e}} &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_b^5}{2\pi^3} \left[\tilde{W}'_1 \hat{q}^2 + \tilde{W}'_2 \left(2\hat{E}_e \hat{E}_{\nu_e} - \frac{\hat{q}^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{W}'_3 \hat{q}^2 (\hat{E}_e - \hat{E}_{\nu_e}) \right] \theta(4\hat{E}_e \hat{E}_{\nu_e} - \hat{q}^2) \end{aligned} \quad (3-52)$$

¹ $m_b^5 = m_b^4 \cdot m_b$, 乘积第一项来自于微分衰变宽度表达式的左边无量纲化, 第二项来自于结构函数的无量纲化。注意, $4\tilde{W}'_i = W_i$

第二种参数化方案

$\bar{B} \rightarrow X_c e \nu$ 过程的强子张量约定如下

$$W_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} \text{Im} \left\{ \frac{i}{m_B} \int d^4x e^{-iq \cdot x} \langle \bar{B} | T \left[J_{L\alpha}^\dagger(x) J_{L\beta}(0) \right] | \bar{B} \rangle \right\} \quad (3-53)$$

基于洛伦兹对称性和电荷共轭对称性, $W_{\alpha\beta}$ 可进行如下的张量分解:

$$m_b W_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} W_1 + v_\alpha v_\beta W_2 - i \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} v^\mu q^\nu W_3 + q_\alpha q_\beta W_4 + (v_\alpha q_\beta + v_\beta q_\alpha) W_5 \quad (3-54)$$

此外, 标量结构函数关于强相互作用耦合常数的微扰展开和关于底夸克质量负幂次的幂次展开为:

$$W_i = W_i^{(0)} + \frac{\mu_\pi^2}{2m_b^2} W_i^{(\pi,0)} + \frac{\mu_G^2}{2m_b^2} W_i^{(G,0)} + \frac{C_F \alpha_s}{\pi} \left[W_i^{(1)} + \frac{\mu_\pi^2}{2m_b^2} W_i^{(\pi,1)} + \frac{\mu_G^2}{2m_b^2} W_i^{(G,1)} \right] \quad (3-55)$$

其中的非微扰矩阵元可进行如下参数化:

$$\begin{aligned} \mu_\pi^2 &= \frac{-1}{2m_B} \langle \bar{B}(v) | \bar{b}_v (iD)^2 b_v | \bar{B}(v) \rangle, \\ \mu_G^2 &= -\frac{1}{6m_B} \langle \bar{B}(v) | \bar{b}_v \frac{g_s}{2} G_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} b_v | \bar{B}(v) \rangle, \end{aligned} \quad (3-56)$$

其中, $D_\mu = \partial_\mu + i g_s G_\mu^a T^a$ 是协变微分算子, $G_{\mu\nu}$ 是规范场强张量, b_v 是静止底夸克场。 λ_1, λ_2 定义于渐进 HQET 区域, 但实际计算过程往往位于有限夸克质量态, 两者的差异如下:

$$\mu_\pi^2 = -\lambda_1 + \mathcal{O}(1/m_b) \quad \mu_G^2 = 3\lambda_2 + \mathcal{O}(1/m_b)$$

两种参数化方案之间关于结构函数约定的全局差异如下¹:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(q^2, \hat{u}) &= 4 \cdot 2^{n+1} (-1)^n W'_{\alpha\beta}(q^2, q^0) \\ W_i &= 4m_b \cdot 2^{n+1} (-1)^n W'_i(q^2, q^0), i = 1, 2 \\ W_3 &= 4m_b^2 \cdot 2^{n+1} (-1)^n W'_3(q^2, q^0) \\ W_4 &= 4m_b^3 \cdot 2^{n+1} (-1)^n W'_4(q^2, q^0) \\ W_5 &= 4m_b^2 \cdot 2^{n+1} (-1)^n W'_5(q^2, q^0) \end{aligned} \quad (3-57)$$

$\bar{B} \rightarrow X_c e \nu$ 过程在新的参数化方案下的三微分衰变宽度为:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_\ell d\hat{q}^2 d\hat{u}} &= \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{cb}|^2}{16\pi^3} \theta(\hat{u}_+ - \hat{u}) \times \\ &\times \left\{ \hat{q}^2 W_1 - \left[2\hat{E}_\ell^2 - 2\hat{E}_\ell \hat{q}_0 + \frac{\hat{q}^2}{2} \right] W_2 + \hat{q}^2 (2\hat{E}_\ell - \hat{q}_0) W_3 \right\}, \end{aligned} \quad (3-58)$$

¹这里的变量替换涉及到 Dirac-delta 函数及其高阶导函数, 需要考虑正确地处理 Delta 函数导数的所有零点并考虑额外的雅可比行列式。 $n=0, 1, 2$ 分别指别至 Dirac delta 函数, 一阶导函数, 二阶导函数

从3-52出发，简单讨论3-58与3-52之间的一致性¹

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\hat{q}^2 d\hat{E}_e d\hat{E}_{\nu_e}} &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_b^5}{4 \cdot 2\pi^3 \cdot 2^{n+1} (-1)^n} \left[W_1 \hat{q}^2 + W_2 \left(2\hat{E}_e \hat{E}_{\nu_e} - \frac{\hat{q}^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + W_3 \hat{q}^2 (\hat{E}_e - \hat{E}_{\nu_e}) \right] \theta \left(4\hat{E}_e \hat{E}_{\nu_e} - \hat{q}^2 \right) \\ &= \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 m_b^5}{16\pi^3 (-2)^n} \left\{ \hat{q}^2 W_1 - \left[2\hat{E}_\ell^2 - 2\hat{E}_\ell \hat{q}_0 + \frac{\hat{q}^2}{2} \right] W_2 + \hat{q}^2 (2\hat{E}_\ell - \hat{q}_0) W_3 \right\} \end{aligned} \quad (3-59)$$

n 取 0，对应结构函数里只含有 Dirac delta 函数（树图阶的领先幂次），这时式(3-59)与式(3-58)形式上保持一致。若结构函数中存在 Dirac Delta 函数的高阶导函数项，则做变量替换需要谨慎考虑 Dirac Delta 函数的零点和额外的雅各比行列式贡献。其主要思路是：从微分衰变宽度出发，用两个准两体末态相空间积分来处理三体衰变末态，积分掉多余的运动学变量，保留 \hat{E}_1, \hat{u}, q^2 ，可得式(3-58)。而式(3-52)的基本思路是：从衰变宽度出发，插入 E_l, E_ν, q^2 的 Dirac δ 函数，抽取出关于 E_l, E_{ν_e}, q^2 的微分衰变宽度。

$$\frac{d\Gamma}{d\hat{q}^2 d\hat{E}_e d\hat{E}_{\nu_e}} = \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_\ell d\hat{q}^2 d\hat{u}} \quad (3-60)$$

$$\frac{d\Gamma}{d\hat{q}^2 d\hat{E}_e} = \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_\ell d\hat{q}^2} \quad (3-61)$$

关于3-61²，由于分部积分引入关于积分结果的冗余自由度，即存在多种等价形式的积分结果，即³：

$$\begin{aligned} f(x)\delta'(x-y) &= f(y) * \delta'(x-y) - f'(y)\delta(x-y) \\ f(x)\delta''(x-y) &= f(y) * \delta''(x-y) - 2f'(y)\delta'(x-y) + f''(y)\delta(x-y) \end{aligned} \quad (3-62)$$

基于以上讨论，可实现两组参数化方案之间的检验。

¹不能简单地认为3-59和3-61在三微分衰变宽度上成立（尽管在树图阶的领先幂次看起来是这样）。一般地，将三微分衰变宽度的表达式分为 δ 项、 δ' 项、 δ'' 项，则3-59分别取 $n=0, 1, 2$ 时，等号对应成立。

²这里的 $(-\frac{1}{2})^n$ 来自于 Dirac delta 函数中变量替换对雅各比行列式的贡献，即上 Dirac delta 函数的零点和额外的雅各比行列式），树图阶没有来自被积函数变量替换带来的雅各比行列式。

³3-62第二行的公式是 $f'(y)$ 的意思是先做 x 到 y 的替换，再对 y 整体求导。另一个公式则不用考虑这个次序：

$$f(x)\delta''(x-y) = f(y)\delta''(x-y) - 2f'(x)\delta'(x-y) - f''(x)\delta(x-y)$$

这个公式是对 $f(x)\delta(x-y) = f(y) * \delta(x-y)$ 求两次关于 x 的导数整理而来。

3.1.4 粲强子单举衰变过程的电子能谱及衰变宽度

粲强子半轻单举衰变相比于底强子半轻单举衰变的区别在于轻子部分，前者轻子末态是正电子和电子中微子，而后者轻子末态是电子和反电子中微子。这一区别反映在轻子张量上 Levi-theta 项上，最终表现为微分衰变宽度中 W_3 项。因此本节直接给出树图水平上精确至量纲五算符非微扰矩阵元水平的 $D \rightarrow X e^+ \nu_e$ 过程电子能谱，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_0} \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_e} = & 96 \hat{E}_e^2 (1 - 2\hat{E}_e) \theta\left(\frac{1}{2} - \hat{E}_e\right) \\ & + \frac{8\mu_\pi^2}{m_c^2} \hat{E}_e^3 \left[20\hat{E}_e + (5 - 6\hat{E}_e) \delta\left(\frac{1}{2} - \hat{E}_e\right) \right] \theta\left(\frac{1}{2} - \hat{E}_e\right) \\ & - \frac{32\mu_G^2}{m_c^2} \hat{E}_e^2 (3 - 5\hat{E}_e) \theta\left(\frac{1}{2} - \hat{E}_e\right) \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (3-63)$$

式(3-63)中， $\hat{E}_e = \frac{E_e}{m_c}$ ， $\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_c^5 V_{CKM}}{192\pi^3}$ ， $\frac{1}{2}^-$ 表示该值位于 $1/2$ 的左侧邻域，第一行是量纲三算符对电子能谱的贡献，第二行和第三行分别是量纲五算符 μ_π^2 和 μ_G^2 对电子能谱的贡献。基于该电子能谱进行加权积分，可得衰变宽度、电子能量矩等多种物理可观测量。例如衰变宽度，

$$\frac{1}{\Gamma_0} \Gamma = 1 - \frac{1}{2m_c^2} \mu_\pi^2 - \frac{3}{2m_c^2} \mu_G^2 \quad (3-64)$$

式(3-64)中， V_{CKM} 主要包含两部分，即 V_{cs} 和 V_{cd} ，末态夸克质量取零极限对应于 $c \rightarrow d$ 跃迁；对于 $c \rightarrow s$ 跃迁，由于奇异夸克质量并非特别小，需要作为软自由度进行保留。本文采用 Mannel 等人的结果 [1] 来考虑末态有限夸克质量效应对粲强子半轻单举衰变的修正。

3.2 微扰修正

本节讨论 $D \rightarrow X e^+ \nu_e$ 过程单圈水平上领先幂次的修正：从 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程的领先幂次出发，取末态夸克零质量极限可得 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的结构函数。此外讨论 $B \rightarrow X_u e \nu$ 的相空间解析积分，得到 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的电子能谱。基于粲强子与底强子单举衰变的区别，可得粲强子单举衰变的电子能谱。由于重夸克展开在电子能量末端失效，因此需要对电子能谱进行加权积分，得到衰变宽度、电子能量矩等各种具有非微扰参数依赖的物理量。

3.2.1 单圈水平上 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程的领先幂次修正

$B \rightarrow X_c e \nu$ 过程的微分衰变宽度是

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_\ell d\hat{q}^2 d\hat{u}} &= \frac{G_F^2 m_b^5 |V_{cb}|^2}{16\pi^3} \\ &\times \left\{ \hat{q}^2 W_1 - \left[2\hat{E}_\ell^2 - 2\hat{E}_\ell \hat{q}_0 + \frac{\hat{q}^2}{2} \right] W_2 + \hat{q}^2 (2\hat{E}_\ell - \hat{q}_0) W_3 \right\} \\ &\times \theta \left[\frac{1}{2} (1 - \rho + \hat{q}^2 - \hat{u}) - \hat{E}_e - \frac{\hat{q}^2}{4\hat{E}_e} \right], \end{aligned} \quad (3-65)$$

其中, $W_i, i=1,2,3$ 是该过程标量结构函数, 它可以被强相互作用耦合常数与底夸克质量负幂次进行双重展开,

$$W_i = W_i^{(0)} + \frac{\mu_\pi^2}{2m_b^2} W_i^{(\pi,0)} + \frac{\mu_G^2}{2m_b^2} W_i^{(G,0)} + \frac{\alpha_s}{\pi} \left[\left[C_F W_i^{(1)} \right] + C_F \frac{\mu_\pi^2}{2m_b^2} W_i^{(\pi,1)} + \frac{\mu_G^2}{2m_b^2} W_i^{(G,1)} \right] + \dots, \quad (3-66)$$

其中, $W_i^{(1)}$ 可由在单圈水平上完整理论和有效理论之间的算符匹配得到。该匹配过程基于图3-4完成,

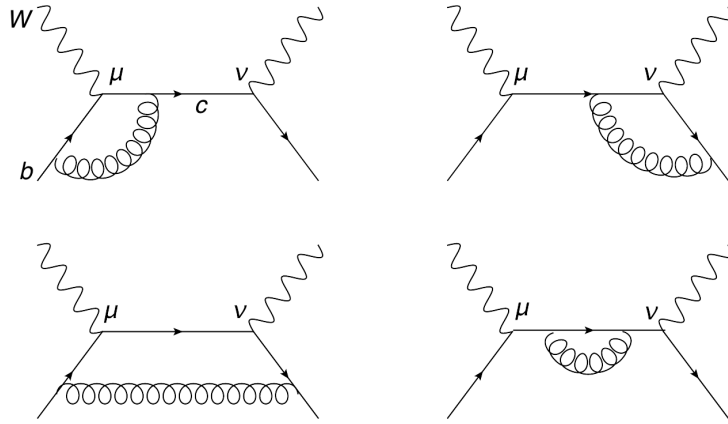


图 3-4 两点关联函数的单圈修正 [2]

P. Gambino 等人 05 年的工作中 [2], 讨论了 $B \rightarrow X_c e \nu$ 单圈水平上领先幂次对结构函数的修正:

$$W_i^{(1)} = w_i^{(0)} \left\{ S_i \delta(\hat{u}) - 2(1 - E_0 I_1) \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ + \frac{\theta(\hat{u})}{(\rho + \hat{u})} \right\} + R_i \theta(\hat{u}), \quad (3-67)$$

其中, $S_i = S + \Delta_i$, $S = 2E_0 (I_{2,0} - I_{4,0}) - 1 - \frac{1-\rho-6\hat{q}^2}{4\hat{q}^2} \ln \rho - \frac{(1-\rho)^2 - 6\hat{q}^2(1+\rho) + 5(\hat{q}^2)^2}{4\hat{q}^2} I_{1,0}$,

$$\Delta_1 = -\frac{\rho}{E_0} I_{1,0}; \quad \Delta_2 = \frac{1-\rho}{4\hat{q}^2} \ln \rho + \left(\frac{(1-\rho)^2}{4\hat{q}^2} - \frac{1+\rho}{4} \right) I_{1,0}; \quad \Delta_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 dy \frac{1}{\chi(y)} = \frac{\ln \frac{1+t}{1-t}}{\sqrt{\lambda}}, \quad I_{1,0} = \int_0^1 dy \frac{1}{\bar{\chi}(y)} = \frac{\ln \frac{1+t_0}{1-t_0}}{\sqrt{\lambda_0}}, \\
I_{4,0} &= \int_0^1 dy \frac{\ln \bar{\chi}(y)}{\bar{\chi}(y)} = \frac{1}{t_0 E_0} [\text{Li}_2(a_1) - \text{Li}_2(a_2) \\
&\quad + \ln \frac{1+t_0}{1-t_0} \ln E_0 (1-t_0)^{\frac{1}{4}} (1+t_0)^{\frac{3}{4}} + \ln E_0 (1+t_0) \ln \frac{1-E_0(1-t_0)}{1-E_0(1+t_0)}], \\
I_{2,0} &= \int_0^1 dy \frac{\ln(1-y)}{\bar{\chi}(y)} = \frac{\text{Li}_2(1-E_0(1+t_0)) - \text{Li}_2(1-E_0(1-t_0))}{\sqrt{\lambda_0}},
\end{aligned}$$

其中, $a_1 = \frac{2t_0/(1+t_0)}{1-E_0(1-t_0)}$, $a_2 = \frac{2t_0 E_0}{1-E_0(1-t_0)}$, $E_0 = \frac{1}{2}(1+\rho-\hat{q}^2)$, $\lambda = 4(\hat{q}_0^2 - \hat{q}^2) = 4(E^2 - \rho - \hat{u})$, $\lambda_0 = 4(E_0^2 - \rho)$, $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{2E}$, $t_0 = \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2E_0}$, $E_0 = \frac{1}{2}(1+\rho-\hat{q}^2)$. 对于实发射部分 R_i , 其具体解析形式为:

$$\begin{aligned}
R_1(\hat{q}^2, \hat{u}) &= \frac{\hat{u}(3\hat{u}+2\rho) + \omega(3\hat{u}+4\rho)}{4(\hat{u}+\rho)^2} + \frac{\hat{u}^2(\omega-\hat{u})}{2(\hat{u}+\rho)\lambda_b} + \frac{6\hat{u}}{\lambda_b} \\
&\quad + \frac{4\hat{u}^2 - (6\hat{\omega} + \lambda_b)\hat{u} + 2\lambda_b\hat{\omega}}{2\lambda_b\sqrt{\lambda_b}} \log \tau, \\
R_2(\hat{q}^2, \hat{u}) &= \frac{2[\hat{\omega}\hat{u}(8-9\hat{u}) - 8\hat{\omega}^3 + 15\hat{\omega}^2\hat{u} + 2\hat{u}(\hat{u}^2 - 8\hat{u} + 8)]}{\lambda_b^2} + \frac{64(1+\hat{\omega}-\hat{u})\rho}{\lambda_b^2} \\
&\quad + \frac{\hat{\omega}\hat{u}(\hat{\omega}-\hat{u})^3}{\lambda_b^2(\hat{u}+\rho)^2} - \frac{2(2\hat{\omega}^4 + \hat{\omega}^2\hat{u}(7+4\hat{u}) - 5\hat{\omega}^3\hat{u} - 9\hat{\omega}\hat{u}^2 + 2\hat{u}^3 - \hat{\omega}\hat{u}^3)}{\lambda_b^2(\hat{u}+\rho)} \\
&\quad + \frac{2}{\lambda_b^2\sqrt{\lambda_b}} \left[2\lambda_b^2 + \lambda_b(26\hat{u} - 2\hat{u}^2 + \hat{\omega}(8+3\hat{u}) + 16\rho) \right. \\
&\quad \left. - 6\hat{u}(3\hat{u}^2 + 2\hat{u}(\rho-5) - 12\rho - \hat{\omega}(3+4\hat{u}+3\rho)) \right] \log \tau, \\
R_3(\hat{q}^2, \hat{u}) &= -\frac{(\hat{\omega}-2)\hat{u} - \hat{\omega}^2 - 4(\hat{\omega}+\rho) + \lambda_b}{\lambda_b\sqrt{\lambda_b}} \log \tau - \frac{\rho}{2(\hat{u}+\rho)^2} \\
&\quad - \frac{3\hat{\omega}+\rho}{2(\hat{\omega}+\rho)(\hat{u}+\rho)} - \frac{8\hat{\omega}+5\hat{\omega}^2-3\hat{\omega}\hat{u}+4\rho+4\hat{\omega}\rho-2\hat{u}\rho}{\lambda_b(\hat{\omega}+\rho)},
\end{aligned}$$

其中, $\tau = \frac{\hat{\omega}-\hat{u}+\sqrt{\lambda_b}}{\hat{\omega}-\hat{u}-\sqrt{\lambda_b}}$, $\hat{\omega} = \hat{q}^2 - 1 - \rho = -\omega - \rho$, $\lambda_b = \lambda$. 此外, 引入 Plus Distribution 以孤立出红外发散和共线发散是必要的, Plus Distribution 定义如下,

$$\int f(\hat{u}) \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ d\hat{u} = \int_0^1 \frac{f(\hat{u}) - f(0)}{\hat{u}} d\hat{u}. \quad (3-68)$$

在取末态夸克质量为零 ($\rho \rightarrow 0$) 的过程中, 在结构函数的层面上会出现类似于 $\ln \rho$ 和 $\ln \rho^2$ 项, 这类对数发散会在对 \hat{u} 做积分的时候出现。原则上有效理论是红外安全的, 表现为对 \hat{u} 的相空间积分之后的结果是有限值。因此在 $\rho \rightarrow 0$ 的过程中可以将所有红外发散或共线发散的点借助 Plus Distribution 孤立出来并验证相消, 基于此便可得末态夸克无质量极限下的结构函数。

3.2.2 单圈水平上 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的领先幂次修正：结构函数

考虑关于 \hat{u} 的光滑函数 $f(\hat{u})$, 本节以 $W_3^{(1)}$ 为例讨论

$$\int f(\hat{u}) W_i^{(1)}(\hat{u}, \hat{q}^2) d\hat{u} \quad (3-69)$$

的积分行为, 分析发散项并给出末态夸克无质量极限下的结构函数。其中,

$$W_i^{(1)} = w_i^{(0)} \left\{ S_i \delta(\hat{u}) - 2(1 - E_0 I_1) \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ + \frac{\theta(\hat{u})}{(\rho + \hat{u})} \right\} + R_i \theta(\hat{u}), \quad (3-70)$$

δ 项的系数 对 $I_{l,0}, l = 1, 2, 4$ 在 $\rho = 0$ 处泰勒展开并保留至领头项:

$$\begin{aligned} I_{1,0} &= \frac{2 \ln(1 - \hat{q}^2) - \ln \rho}{1 - \hat{q}^2} + O(\rho), \\ I_{2,0} &= \frac{\text{Li}_2(\hat{q}^2) - \frac{\pi^2}{6}}{1 - \hat{q}^2} + O(\rho), \\ I_{4,0} &= \frac{2 \ln^2(1 - \hat{q}^2) + 2 \text{Li}_2(\hat{q}^2) - \frac{1}{2} \ln^2 \rho}{1 - \hat{q}^2} + O(\rho), \end{aligned} \quad (3-71)$$

将其带入 S 的表达式, 保留至 ρ 的领先幂次, 有

$$S = \frac{\ln \rho}{4} + \frac{\ln^2 \rho}{2} - \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2(\hat{q}^2) - 2 \ln^2(1 - \hat{q}^2) - 1 - \frac{1 - 5\hat{q}^2}{2\hat{q}^2} \ln(1 - \hat{q}^2) + O(\rho), \quad (3-72)$$

这里出现的类似于 $\ln \rho^2$ 之类的项, 将与其他项的系数相互抵消, 最终结构函数里没有对数发散项。

实发射部分: R_3 包括且不限于 W_3 的实发射部分, 均存在这样的一般形式, 即

$$R_i = \frac{r_i^{(1)} \hat{u} + r_i^{(2)} \rho}{(\hat{u} + \rho)^2} + \frac{s_i}{\hat{u} + \rho} + t_i, i = 1, 2, 3.$$

其中, $r_i^{(1)}, s_i^{(1)}, t_i^{(1)}$ 均关于 \hat{u} 光滑。对于 W_3 , 有

$$r_3^{(1)} = 0, \quad r_3^{(2)} = 1/2, \quad s_3 = -3/2 - \rho/\omega, \quad (3-73)$$

$$t_3 = \frac{3\hat{u} + 5\omega - 8}{\tilde{\lambda}} + \frac{(\tilde{\lambda} - \hat{u}\omega - 2\hat{u} - \omega^2 + 4\omega)}{\tilde{\lambda}} \mathcal{I}_1,$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\lambda}}} \ln \frac{\hat{u} + \omega + \sqrt{\tilde{\lambda}}}{\hat{u} + \omega - \sqrt{\tilde{\lambda}}}, \\ \tilde{\lambda} &= (\hat{u} + \omega)^2 - 4\hat{u}, \end{aligned} \quad (3-74)$$

$r_3^{(1)}, r_3^{(2)}, s_3$ 将参与到共线发散和红外发散的相消中。下面以关于 \hat{u} 光滑的测试函数为例逐项分析其关于 \hat{u} 积分行为,

$$\int_0^1 f(\hat{u}) \frac{1}{\hat{u}+\rho} d\hat{u} = \int_0^1 \frac{f(\hat{u}) - f(0) + f(0)}{\hat{u}+\rho} d\hat{u} = \int_0^1 f(\hat{u}) \left(\left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ - \ln \rho \delta(\hat{u}) \right) d\hat{u} + O(\rho), \quad (3-75)$$

对于 $\frac{1}{\hat{u}+\rho}$ 项, 积分意义上如下的等效是合法且必要的,

$$\frac{1}{\hat{u}+\rho} \rightarrow \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ - \ln \rho \delta(\hat{u}).$$

$$\int_0^1 \frac{\rho}{(\hat{u}+\rho)^2} d\hat{u} = \frac{1}{1+\rho} = 1 + O(\rho), \quad (3-76)$$

对于 $\frac{\rho}{\hat{u}+\rho}$ 项, 积分意义上如下的等效是合法且必要的,

$$\frac{\rho}{(\hat{u}+\rho)^2} \rightarrow \delta(\hat{u}).$$

对于 $\frac{\hat{u}}{\hat{u}+\rho}$ 可被上面两项进行线性表出,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}}{(\hat{u}+\rho)^2} &= c_1 \frac{1}{\hat{u}+\rho} + c_2 \frac{\rho}{(\hat{u}+\rho)^2} \\ &= \frac{c_1 \hat{u} + (c_1 + c_2) \rho}{(\hat{u}+\rho)^2} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -c_1 = -1, \end{aligned} \quad (3-77)$$

换言之, 对于 $\frac{\hat{u}}{(\hat{u}+\rho)^2}$, 积分意义上如下的等效是合法且必要的,

$$\frac{\hat{u}}{(\hat{u}+\rho)^2} \rightarrow \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ - \ln \rho \delta(\hat{u}) - \delta(\hat{u}).$$

分析标量结构函数在积分意义上的积分行为并引入 **PLus Distribution** 分布将象征红外发散和共线发散的项 ($\ln \rho$ 等) 孤立出来。以上讨论为进一步分析红外发散和共线发散在相空间积分意义上的相消奠定了基础。对上述结果进行整理, 借助 **Plus Distribution** 从实发射部分 R_3 中孤立出来的发散项¹包括;

$$(-3/2 - \rho/\omega) \ln \rho \delta(\hat{u}). \quad (3-78)$$

Plus Distribution 部分 关于 \hat{u} 的奇点隐藏在积分 I_1 和 I_{10} 中, 由 **Plus Distribution** 的定义 (式(3-68)) 可得关于这部分的讨论聚焦于

$$\frac{I_1 - I_{1,0}}{\hat{u}}, \quad (3-79)$$

¹ $\delta(\hat{u})$ 在关于 \hat{u} 积分的意义上不属于发散项

式(3-79)在 $\hat{u} = \hat{q}^2 = 0$ 处是不解析的, 为了明确这一点, 将式 3-79 在 $\omega \gg \hat{u}, \hat{q}^2$ 处进行展开¹。奇异部分是

$$\left. \frac{I_1 - I_{1,0}}{\hat{u}} \right|_{sing} = \frac{\ln \frac{\rho}{\hat{u} + \rho}}{\omega \hat{u}}. \quad (3-80)$$

减除掉奇异的部分是关于 ρ 正规的, 因此可以将3-79写成两部分,

$$\frac{I_1 - I_{1,0}}{\hat{u}} = \frac{1}{\omega \hat{u}} \ln \frac{\rho}{\hat{u} + \rho} + B(\hat{q}^2, \hat{u}) + O(\rho). \quad (3-81)$$

其中,

$$B(\hat{q}^2, \hat{u}) = \frac{\ln(\hat{u}/\omega^2) + \omega I_1}{\omega \hat{u}} \simeq \frac{\omega - 2}{\omega^3} \ln \frac{\hat{u}}{\omega^2} + \frac{2(\omega - 1)}{\omega^3} + O(\hat{u}), \quad (3-82)$$

式(3-82)中仅存在关于 \hat{u} 的对数奇点, 这是可积的。使用玩具模型 (Toy-Model) 将相关发散项孤立出来之后预备相消。将上述结论应用于实际情况, 即:

$$\begin{aligned} \int f(\hat{u}) I_1 \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ d\hat{u} &= \int_0^1 \frac{f(\hat{u}) I_1(\hat{u}) - f(0) I_{1,0}}{\hat{u}} d\hat{u} \\ &= \underbrace{f(0) \int_0^1 \frac{I_1 - I_{1,0}}{\hat{u}} d\hat{u}}_{\text{第一项}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(f(\hat{u}) - f(0)) (I_1 - I_{1,0})}{\hat{u}} d\hat{u}}_{\text{第二项}} + \underbrace{I_{1,0} \int_0^1 \frac{f(\hat{u}) - f(0)}{\hat{u}} d\hat{u}}_{\text{第三项}}. \end{aligned} \quad (3-83)$$

对于第一项,

$$\begin{aligned} f(0) \int_0^1 \frac{I_1 - I_{1,0}}{\hat{u}} d\hat{u} &= f(0) \int_0^1 \frac{1}{\omega \hat{u}} \ln \frac{\rho}{\hat{u} + \rho} d\hat{u} + f(0) \int_0^1 B(\hat{q}^2, \hat{u}) d\hat{u} \\ &= f(0) \cdot \left(\frac{-\frac{\pi^2}{3} + \ln^2 \rho}{2\omega} \right) + f(0) \int_0^1 B(\hat{q}^2, \hat{u}) d\hat{u}. \end{aligned} \quad (3-84)$$

对于第二项,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(\hat{u}) - f(0)}{\hat{u}} (I_1 - I_{1,0}) d\hat{u} &= \int_0^1 (f(\hat{u}) - f(0)) \left(\frac{1}{\omega \hat{u}} \ln \frac{\rho}{\hat{u} + \rho} + B(\hat{q}^2, \hat{u}) \right) d\hat{u} \\ &= \frac{1}{\omega \hat{u}} \ln \frac{\rho}{\hat{u}} + O(\rho). \end{aligned} \quad (3-85)$$

对于第三项,

$$I_{1,0} \int_0^1 \frac{f(\hat{u}) - f(0)}{\hat{u}} d\hat{u} = \frac{2 \ln \omega}{\omega} \int_0^1 f(\hat{u}) \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ d\hat{u} - \frac{\ln \rho}{\omega} \int_0^1 f(x) \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ d\hat{u}. \quad (3-86)$$

将上面三项合并, 整理可得,

$$\int f(\hat{u}) I_1 \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ d\hat{u} = \int f(\hat{u}) \left[a \delta(\hat{u}) + b \left[\frac{\ln \hat{u}}{\hat{u}} \right]_+ + c \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ + d \theta(\hat{u}) \right] d\hat{u}. \quad (3-87)$$

¹对于 I_1 而言, 展开参数是 $x = 2(\rho + \hat{u})/\omega$; 对于 $I_{1,0}$ 而言, 展开参数是 $y = 2\hat{u}/\omega$; 由于 $0 < \omega < 1$, 保留 $(\rho + \hat{u})/\omega^2$ 项是必要的

其中, $a = -\frac{\pi^2 + \ln^2 \rho}{2w}$, $b = -\frac{1}{w}$, $c = \frac{2\ln w}{w}$, $d = B(\hat{q}^2, \hat{u})$. 结果表明, 对于任意关于 \hat{u} 光滑的积分测试函数 $f(\hat{u})$, 式(3-83)中第一、二、三项之间将发散项均可相互抵消, 结果表明关于 ρ 是可积的。综上所述, 最终结构函数中有关 ρ 的奇异项全部给抵消, 可得 $B \rightarrow X_u e \nu_e$ 的结构函数如下所示,

$$W_i^{(1)} = w_i^{(0)} \left\{ S_i \delta(\hat{u}) - \left[\frac{\ln \hat{u}}{\hat{u}} \right] - \left(\frac{7}{4} - 2\ln w \right) \left[\frac{1}{\hat{u}} \right] + w B(\hat{q}^2, \hat{u}) \theta(\hat{u}) \right\} + \mathcal{R}_i^{(1)} \theta(\hat{u}). \quad (3-88)$$

其中,

$$S_i = -\frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{3} - \text{Li}_2(1-w) - 2\ln^2 w - \frac{5w-4}{2(1-w)} \ln w + \frac{\ln w}{2(1-w)} \delta_{i2} \quad (3-89)$$

特别的, 实发射部分如下所示,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{(1)} &= \frac{3}{4} + \frac{\hat{u}(12-w-\hat{u})}{2\tilde{\lambda}} + \left(w + \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}(2\hat{u}+3w)}{\tilde{\lambda}} \right) \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{R}_2^{(1)} &= \frac{6\hat{u}(\hat{u}^2 - (3-w)\hat{u} - 12 + 13w)}{\tilde{\lambda}^2} + \frac{\hat{u} - 38 + 21w}{\tilde{\lambda}} \\ &\quad - 4 \frac{\frac{w}{2}\hat{u}^3 + (2w^2 - 6)\hat{u}^2 + \left(7 - 3w + \frac{5}{2}w^2\right)w\hat{u} + w^3(w-4)}{\tilde{\lambda}^2} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{R}_3^{(1)} &= \frac{3\hat{u} - 8 + 5w}{\tilde{\lambda}} + \frac{\hat{u}^2 - (6-w)\hat{u} + 4w}{\tilde{\lambda}} \mathcal{I}_1 \end{aligned} \quad (3-90)$$

上述讨论结果与 Paolo Gambino 等人的工作 [57] 保持一致。

3.2.3 单圈水平上 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的领先幂次修正：相空间解析积分

末态相空间解析积分的过程中, $\{\hat{u}, \hat{q}^2, \hat{E}_e\}$ 的积分区域与树图阶的讨论一致, 积分思路基本如下: 微分衰变宽度中包含三部分的贡献, 分别是 $W_i, i=1, 2, 3$ 相关项。这里对三部分分别积分, 对于某些行为复杂的函数, 单独提取出来, 将三部分对应的项加和之后进行积分。本节重点展示部分内容的积分流程。

Plus Distribution 以 $\left[\frac{1}{\hat{u}}\right]_+$ 为例, 关于 \hat{u} 的解析积分为:

$$\begin{aligned} &\int f(\hat{u}) \theta \left[\frac{1}{2} (1 + \hat{q}^2 - \hat{u}) - \hat{E}_e - \frac{\hat{q}^2}{4\hat{E}_e} \right] \left[\frac{1}{\hat{u}} \right]_+ d\hat{u} = \\ &\int_0^1 \frac{f(\hat{u})}{\hat{u}} \theta \left[\frac{1}{2} (1 + \hat{q}^2 - \hat{u}) - \hat{E}_e - \frac{\hat{q}^2}{4\hat{E}_e} \right] d\hat{u} - \int_0^1 \frac{f(0)}{\hat{u}} \theta \left[\frac{1}{2} (1 + \hat{q}^2) - \hat{E}_e - \frac{\hat{q}^2}{4\hat{E}_e} \right] d\hat{u}. \end{aligned} \quad (3-91)$$

$f(\hat{u})$ 一般是关于 \hat{u} 的多项式, \hat{u} 的积分上限由 Heavside-Theta 函数给出, 积分下限带来的奇异性相互抵消。

实发射部分 以式(3-92)为例，这是实发射部分的积分中最「奇异」的部分

$$12\hat{E}_e \ln \left(\frac{\sqrt{(-\hat{q}^2 + \hat{u} + 1)^2 - 4\hat{u}} - \hat{q}^2 + \hat{u} + 1}{-\sqrt{(-\hat{q}^2 + \hat{u} + 1)^2 - 4\hat{u}} - \hat{q}^2 + \hat{u} + 1} \right) \left((-\hat{q}^2 + \hat{u} + 1)^2 - 4\hat{u} \right)^{-5/2}, \quad (3-92)$$

式(3-92)关于 \hat{u} 存在两个奇点，均位于分母。如下所示：由于 \hat{u} 的物理区域是 $[0, 1]$ ，

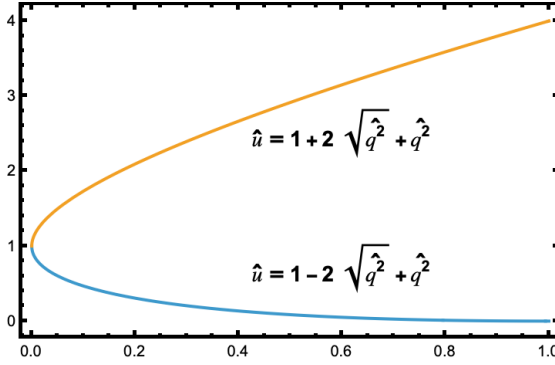


图 3-5 实发射部分奇点分析 1

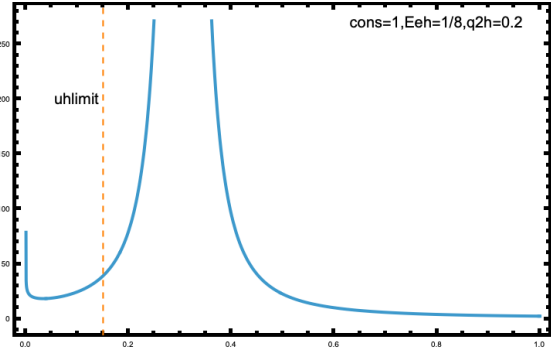


图 3-6 实发射部分奇点分析 2

因此橙色曲线对应的奇点分布是非物理的。至于蓝色曲线对应的奇点分布，如图3-6所示，其中橙色虚线表示 \hat{u} 的积分上限，图中的发散区域对应于图3-5上 $\hat{q}^2 = 0.25$ 附近，结果表明物理的奇点不在 \hat{u} 的积分区域以内。因此，式(3-92)在 \hat{u} 的积分区域内不存在关于 \hat{u} 的不可积奇点。

B 函数的相关项 将三部分中的 $B(\hat{u}, \hat{q}^2)$ 相关的项放在一起进行积分，其中最「奇异」的部分为：

$$\frac{2(2\hat{E}_e - \hat{q}^2 - 1)}{\hat{u}} \left[(2\hat{E}_e - \hat{q}^2) \mathcal{L}_2 - \frac{(\hat{q}^2 - 1)(\hat{q}^2 - 2\hat{E}_e)}{\Delta} \mathcal{L}_1 \right] \quad (3-93)$$

其中， $\Delta = \sqrt{(-\hat{q}^2 + \hat{u} + 1)^2 - 4\hat{u}}$, $\mathcal{L}_1 = \log \left(\frac{\Delta - \hat{q}^2 + \hat{u} + 1}{-\Delta - \hat{q}^2 + \hat{u} + 1} \right)$, $\mathcal{L}_2 = \log \left(\frac{\hat{u}}{(\hat{q}^2 - 1)^2} \right)$ 。式(3-93)中似乎表明被积函数在 $\hat{u} = 0$ 处发散，对被积函数在 $\hat{u} = 0$ 处进行泰勒展开¹并分析发散行为²是必要的。基于量子场论正规化思想，引入正规化常数 ϵ 至积分区域边界处：

$$\int_0^1 f(\hat{u}) d\hat{u} \rightarrow \int_\epsilon^1 f(\hat{u}) d\hat{u} \quad \text{Im}(\epsilon) = 0 \text{ 且 } \epsilon > 0. \quad (3-94)$$

积分完成后，取正规化参数趋于零的极限，结果表明式(3-93)存在一个有限的积分结果。

¹ 泰勒展开的领头阶事实上对应于 \hat{u} 趋于零的极限

² 确定正规化参数取极限的方向以及积分限的偏移方向是必要的，否则会引入新的发散或错误，特别地，需要谨慎积分变量换元之后积分限的偏移方向。

3.2.4 单圈水平上 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 过程的领先幂次修正

结合粲强子半轻单举衰变与底强子半轻单举衰变的区别,可得粲强子半轻单举衰变的电子能谱中对应于单圈水平上领先幂次修正的部分,电子能谱在电子能量的端点区域具有对数发散(可积发散)。对其进行加权积分,可得各类物理观测量的解析形式。

事实上, $D \rightarrow Xe^+\nu$ 主要包含两个过程,分别是 $D \rightarrow X_s e^+$ 和 $D \rightarrow X_d e^+\nu$ 。对于前者,由于奇异夸克质量并非特别小,这里作为一个软自由度进行保留,有关末态有限夸克质量效应的修正,本文采用了 Mannel 等人 [1] 的工作。 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 的衰变宽度为: 对于衰变宽度,

$$\begin{aligned} \Gamma_{D_i} = \sum_{q=d,s} \hat{\Gamma}_0 |V_{cq}|^2 m_c^5 \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{2}{3} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right. \\ \left. + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[\frac{\beta_0}{4} \frac{2}{3} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \log \left(\frac{\mu^2}{m_c^2} \right) + 2.14690 n_l - 29.88311 \right] \right. \\ \left. - 8\rho \delta_{sq} - \frac{1}{2} \frac{\mu_\pi^2(D_i)}{m_c^2} - \frac{3}{2} \frac{\mu_G^2(D_i)}{m_c^2} + 6 \frac{\rho_D^3(D_i)}{m_c^3} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3-95)$$

式(3-95)中, $\hat{\Gamma}_0 = G_F^2/(192\pi^3)$, V_{cq} 是对应过程的 CKM 矩阵元, 指标 $i = u, d, s$ 分别指 D^+, D^0 和 D_s^+ , $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ 是量子色动力学 β 函数的第一个系数, $\rho \equiv m_s^2/m_c^2$ 。对于微扰修正, $n_f = 4$ 对应于 $n_l = 3$ 。本文微扰部分的单圈修正结果与 DeFazio, Capdevila 等人的工作一致 [57, 58]。VanRitbergen 和 Brucherseifer 等人讨论了 $b \rightarrow u$ 过程的两圈图水平上领先幂次的修正, 在衰变宽度的意义上, 底强子弱衰变弱衰变 $n_f = 5$ 而粲强子单举弱衰变的 $n_f = 4$ 。本文关于两圈图修正的数值结果由陈龙、马滢青老师提供。关于3-95中非微扰矩阵元的定义, 本文采用 Mannel 等人的约定 [1]:

$$\begin{aligned} \mu_\pi^2(D_i) &\equiv \langle D_i | \bar{c}_v(iD)^2 c_v | D_i \rangle / (2m_{D_i}), \\ \mu_G^2(D_i) &\equiv \langle D_i | \bar{c}_v(iD_\alpha)(iD_\beta)(-i\sigma^{\alpha\beta}) c_v | D_i \rangle / (2m_{D_i}), \\ \rho_{LS}^3(D_i) &\equiv \frac{1}{2} \langle D_i | \bar{c}_v \{ (iD_\alpha), [iv \cdot D, iD_\beta] \} (-i\sigma^{\alpha\beta}) | D_i \rangle / (2m_{D_i}), \\ \rho_D^3(D_i) &\equiv \frac{1}{2} \langle D_i | \bar{c}_v [(iD^\mu), [iv \cdot D, iD_\mu]] c_v | D_i \rangle / (2m_{D_i}). \end{aligned} \quad (3-96)$$

n 阶电子能量原点矩, 其定义如下

$$\langle E_e^n \rangle = \frac{1}{\Gamma} \int \hat{E}_e^n \frac{d\Gamma}{d\hat{E}_e} d\hat{E}_e, \quad (3-97)$$

其中, Γ 是衰变宽度, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。对电子能谱进行加权积分, 前四阶电子能量

(原点) 矩如下所示,

$$\begin{aligned}
\langle E_e \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_c^6 \left[\frac{3}{10} + \frac{\alpha_s}{\pi} a_1^{(1)} + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} a_1^{(2)} - 3\rho\delta_{sq} - \frac{1}{2} \frac{\mu_G^2(D_i)}{m_c^2} + \frac{139}{30} \frac{\rho_D^3(D_i)}{m_c^3} + \frac{3}{10} \frac{\rho_{LS}^3(D_i)}{m_c^3} + \dots \right], \\
\langle E_e^2 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_c^7 \left[\frac{1}{10} + \frac{\alpha_s}{\pi} a_2^{(1)} + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} a_2^{(2)} - \frac{6}{5} \rho\delta_{sq} + \frac{1}{12} \frac{\mu_\pi^2(D_i)}{m_c^2} - \frac{11}{60} \frac{\mu_G^2(D_i)}{m_c^2} + \frac{17}{6} \frac{\rho_D^3(D_i)}{m_c^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{7}{30} \frac{\rho_{LS}^3(D_i)}{m_c^3} + \dots \right], \\
\langle E_e^3 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_c^8 \left[\frac{1}{28} + \frac{\alpha_s}{\pi} a_3^{(1)} + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} a_3^{(2)} - \frac{1}{2} \rho\delta_{sq} + \frac{1}{14} \frac{\mu_\pi^2(D_i)}{m_c^2} - \frac{1}{14} \frac{\mu_G^2(D_i)}{m_c^2} + \frac{223}{140} \frac{\rho_D^3(D_i)}{m_c^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{7} \frac{\rho_{LS}^3(D_i)}{m_c^3} + \dots \right], \\
\langle E_e^4 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_c^9 \left[\frac{3}{224} + \frac{\alpha_s}{\pi} a_4^{(1)} + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} a_4^{(2)} - \frac{3}{14} \rho\delta_{sq} + \frac{3}{64} \frac{\mu_\pi^2(D_i)}{m_c^2} - \frac{13}{448} \frac{\mu_G^2(D_i)}{m_c^2} + \frac{481}{560} \frac{\rho_D^3(D_i)}{m_c^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{112} \frac{\rho_{LS}^3(D_i)}{m_c^3} + \dots \right],
\end{aligned}$$

式(3-98)的 NLO 和 NNLO 系数如下所示,

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)} &= \frac{1093 - 180\pi^2}{900}, \quad a_2^{(1)} = \frac{4243 - 720\pi^2}{10800}, \quad a_3^{(1)} = \frac{144037 - 25200\pi^2}{1058400}, \quad a_4^{(1)} = \frac{69827 - 12600\pi^2}{1411200}, \\
a_1^{(2)} &= \frac{\beta_0}{4} a_1^{(1)} \ell - 7.70077, \quad a_2^{(2)} = \frac{\beta_0}{4} a_2^{(1)} \ell - 2.77835, \quad a_3^{(2)} = \frac{\beta_0}{4} a_3^{(1)} \ell - 1.06371, \quad a_4^{(2)} = \frac{\beta_0}{4} a_4^{(1)} \ell - 0.42438,
\end{aligned}$$

本文关于前两阶电子能量(原点)矩的结果与 Kamenik 等人的工作 [59] 一致, 树图水平上量纲六算符的修正来源于 Mannel 等人的工作 [1], 前四阶矩的领头阶与 Mannel 等人的结果 [1] 一致。事实上, 本文同样提供了电子能量第二、三、四阶的中心矩, 电子能量的中心矩由原点矩线性组合而成, 定义如下:

$$\langle E_e \rangle, \langle E_e^2 \rangle_{\text{center}} \equiv \langle (E_e - \langle E_e \rangle)^2 \rangle, \langle E_e^3 \rangle_{\text{center}} \equiv \langle (E_e - \langle E_e \rangle)^3 \rangle, \langle E_e^4 \rangle_{\text{center}} \equiv \langle (E_e - \langle E_e \rangle)^4 \rangle. \quad (3-98)$$

由于物理可观测量对粲夸克质量的高度敏感性, 有关粲夸克质量方案的讨论是必要的, 具体讨论将在第四章全局拟合的部分呈现。

3.3 更高量纲算符非微扰矩阵元的参数化

上一节通过对电子能谱的加权积分得到各类物理可观测量, 其中量纲六算符非微扰矩阵元的贡献来自于 Mannel 等人的工作 [1]。本节基于 Lenz 等人的工作 [60] 对量纲六算符非微扰矩阵元的参数化进行简单介绍。

量纲六算符分为两夸克算符和四夸克算符, 对于两夸克算符, 仅 ρ_D^3 对衰变宽度有贡献, 其非微扰矩阵元可做如下的参数化

$$2m_D \rho_D^3(D) = \langle D(p) | \bar{c}_v (iD_\mu) (iv \cdot D) (iD^\mu) c_v | D(p) \rangle. \quad (3-99)$$

在衰变宽度的水平上,

$$\Gamma_6 \frac{\langle O_6 \rangle}{m_c^3} = \Gamma_0 c_{\rho_D} \frac{\rho_D^3}{m_c^3} \quad (3-100)$$

其中, $\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_c^5 V_{CKM}}{192\pi^3}$, $c_{\rho_D} = 3C_1^2 C_{\rho_D,11} + 2C_1 C_2 C_{\rho_D,12} + 3C_2^2 C_{\rho_D,22} + C_{\rho_D,SL}$.

对于底强子弱衰变过程, Lenz, Mannel 和 Daniel 等人的工作 [61–63] 给出了非轻部分的 Wilson 系数, 其中需要处理来自轻自由度的软胶子辐射, 会导致 $\ln(m_q/m_b)$ 的对数发散, 事实上, 将四夸克算符以及算符混合的贡献考虑在内, 则可以完全消除; 对于底强子的半轻衰变, 由于 $\rho = m_c^2/m_b^2$ 不是一个小量, $b \rightarrow c e \bar{\nu}_e$ 过程量纲六算符的 Wilson 系数是有限的, 但中间无质量传播子发射软胶子使得 $b \rightarrow u e \bar{\nu}$ 过程量纲六算符对应的 Wilson 系数存在发散。

对于粲强子弱衰变过程, 由于, $m_c \gg m_s \sim \Lambda_{QCD}$, 因此末态奇异夸克质量作为软自由度与四夸克算符的混合需要额外考虑, Lenz 等人的工作 [3] 讨论了这部分的 Wilson 系数, 并将其用于 D 介子寿命的理论计算。

量纲六算符中四夸克算符来源于旁观者夸克效应, 存在以下三种贡献 (图3-7), 图3-7中从左至右分别是弱交换 (Weak Exchange, WE)、泡利干涉 (Pauli

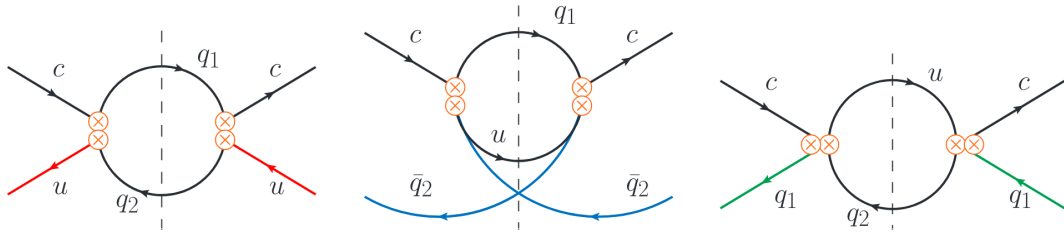


图 3-7 重夸克展开的旁观者夸克效应拓扑图 [3]

Interference, PI) 和弱湮灭 (Weak Annihilation, WA) 贡献¹。量纲六算符中的四夸克算符如下所示²

$$\begin{aligned}
 O_1^q &= (\bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q) (\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) c), \\
 O_2^q &= (\bar{c} (1 - \gamma_5) q) (\bar{q} (1 + \gamma_5) c), \\
 O_3^q &= T_1^q = (\bar{c} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) T^A q) (\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) T^A c), \\
 O_4^q &= T_2^q = (\bar{c} (1 - \gamma_5) T^A q) (\bar{q} (1 + \gamma_5) T^A c),
 \end{aligned} \tag{3-101}$$

在量子色动力学框架下, 其非微扰矩阵元进行如下的参数化,

$$\begin{aligned}
 \langle D_q | O_i^q | D_q \rangle &= A_i f_{D_q}^2 m_{D_q}^2 B_i^q \\
 \langle D_q | O_i^{q'} | D_q \rangle &= A_i f_{D_q}^2 m_{D_q}^2 \delta_i^{qq'}, \quad q \neq q'
 \end{aligned} \tag{3-102}$$

其中, $A_1^q = A_3^q = 1$, $A_2^q = A_4^q = \frac{m_D^2}{(m_c + m_q)^2}$, $f_{D_q}^2$ 量子色动力学框架下的 D_q 介子的衰变常数, m_{D_q} 是 D_q 质量, B_i^q 是 Bag 参数。在重夸克有效理论框架下, 量纲六

¹半轻衰变只存在弱湮灭贡献

²两个等号表示存在两种记号

算符中的四夸克算符为：

$$\begin{aligned}
\tilde{O}_1^q &= (\bar{h}_v \gamma_\mu (1 - \gamma_5) q) (\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) h_v), \\
\tilde{O}_2^q &= (\bar{h}_v (1 - \gamma_5) q) (\bar{q} (1 + \gamma_5) h_v), \\
\tilde{O}_3^q &= \tilde{T}_1^q = (\bar{h}_v \gamma_\mu (1 - \gamma_5) T^A q) (\bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) T^A h_v), \\
\tilde{O}_4^q &= \tilde{T}_2^q = (\bar{h}_v (1 - \gamma_5) T^A q) (\bar{q} (1 + \gamma_5) T^A h_v),
\end{aligned} \tag{3-103}$$

其中 h_v 是积掉重自由度的有效重夸克场，量纲六算符中的四夸克算符可以进行如下的参数化，

$$\begin{aligned}
\langle D_q | \tilde{O}_i^q | D_q \rangle &= F^2(\mu) m_{D_q} \tilde{B}_i^q \\
\langle D_q | \tilde{O}_i^{q'} | D_q \rangle &= F^2(\mu) m_{D_q} \tilde{\delta}_i^{q'q}, \quad q \neq q',
\end{aligned} \tag{3-104}$$

其中 $q, q' = u, d, s$, \tilde{B}_i^q 表示 HQET 中的 Bag 参数, $\tilde{B}_{1,2}^q$ 对应于色单态算符, $\tilde{B}_{3,4}^q \equiv \tilde{\epsilon}_{1,2}^q$ 对应于色八态算符, $F(\mu)$ 是 HQET 衰变常数。

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 h_v | D_q(v) \rangle_{\text{HQET}} &= iF(\mu) \sqrt{m_{D_q}} v^\mu, \\
\langle 0 | \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 c | D_q(p) \rangle_{\text{QCD}} &= if_{D_q} p^\mu
\end{aligned} \tag{3-105}$$

真空插入近似假设 (vacuum insertion approximation, VIA) 为简化强子内部相互作用，近似假设强子内为真空态，其色场被近似为色单态。具体地，在四夸克算符矩阵元中插入一组完备集，仅保留真空态贡献，将四夸克算符非微扰矩阵元因子化为衰变常数和 Bag 参数的乘积，Bag 参数依赖于算符中的色结构。色单态算符对应的 Bag 参数被假设为 1，色八重态算符对应的 Bag 参数被假设为 0。

式(3-104)中的 $\tilde{\delta}_i^{q'q}$ 描述了 eye-contractions, 如图3-8所示，eye-contractions 指由于内外夸克之间的相互作用，它们以一种特定的方式被连接起来。

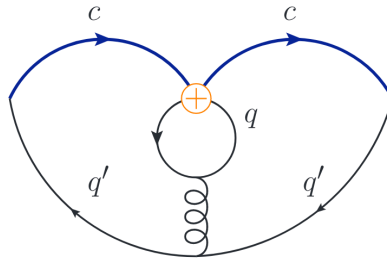


图 3-8 量纲六算符非微扰矩阵元之一：Eye-contractions 效应 [3]

受到 α_s 的压低，真空插入近似下，Eye-contractions 贡献被假设为零。在重夸克有效理论求和规则中 (Heavy Quark Effective Theory Sum Rule, HQETSR)，表征 Eye-contractions 的参数 $\tilde{\delta}_i^{q'q}$ 则并不严格为零。值得注意的是， $D^{*,0}$ 介子的 Bag 参数 \tilde{B}_i^q 的 HQETSR 的预言由 Lenz 等人的工作 [64] 给出，同时他们也给出

HQET, $\mu_0 = 1.5\text{GeV}$	\tilde{B}_1	\tilde{B}_2	$\tilde{\epsilon}_1$	$\tilde{\epsilon}_2$
$D^{+,0}$	$1.0026^{+0.0198}_{-0.0106}$	$0.9982^{+0.0052}_{-0.0066}$	$-0.0165^{+0.0209}_{-0.0346}$	$-0.0004^{+0.0200}_{-0.0326}$
D_s^+	$1.0022^{+0.0185}_{-0.0099}$	$0.9983^{+0.0052}_{-0.0067}$	$-0.0104^{+0.0202}_{-0.0330}$	$0.0001^{+0.0199}_{-0.0324}$
HQET, $\mu_0 = 1.5\text{GeV}$	$\tilde{\delta}_1$	$\tilde{\delta}_2$	$\tilde{\delta}_3$	$\tilde{\delta}_4$
$\langle D_q \tilde{O}^q D_q \rangle$	$0.0026^{+0.0142}_{-0.0092}$	$-0.0018^{+0.0047}_{-0.0072}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0024}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$
$\langle D_s \tilde{O}^q D_s \rangle$	$0.0025^{+0.014}_{-0.0093}$	$-0.0018^{+0.0047}_{-0.0072}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0024}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$
$\langle D_q \tilde{O}^s D_q \rangle$	$0.0023^{+0.0140}_{-0.0091}$	$-0.0017^{+0.0046}_{-0.0070}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0023}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$

表 3-1 HQETSR 关于 Bag 参数的数值结果

了 Eye-contractions 效应的 HQETSR 的预言 [60]。如表3-1所示，基于真空插入近似，表征 Eye-contractions 效应的参数和色八重态算符对应的 Bag 参数被假设为零，色单态算符非微扰矩阵元收到相应 Wilson 系数压低，这是我们从实验数据中抽取量纲五算符和量纲六算符两夸克算符非微扰矩阵元的理论依据。

3.4 本章回顾

基于第二章关于重夸克有效理论和算符乘积简单介绍，深入介绍了本文理论方面的努力。首先基于 Mark.B.Wise 的经典教材 [55] 介绍了 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程 Wilson 系数的匹配和末态相空间的解析积分，获得该过程以及 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程电子能谱的解析形式；其次，基于更现代的运动学变量对 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程进行相同的讨论，并给出两组运动学变量（运动学参数化方案）之间的联系；此外，基于更现代的运动学变量对 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程领先幂次修正的单圈微扰修正进行讨论，并推广至 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程；最后，本章将有关 B 介子半轻单举衰变的讨论转换到 $D \rightarrow X e^+ \nu$ 过程，对电子能谱进行加权积分，获得了衰变宽度、电子能量一、二、三、四阶原点矩。以上的讨论为 D 介子半轻单举衰变的系统性唯象学分析奠定了理论基础。

第四章 粲介子半轻单举衰变的数据处理与唯象学分析

本章将系统性讨论 D 介子半轻单举衰变的唯象学分析。首先,对我国高能物理研究所的 BESIII 合作组和美国康奈尔大学的 CLEO 合作组测量 D 介子半轻单举衰变的实验现状进行介绍并讨论相关物理可观测量的抽取。其次,由于衰变宽度对重夸克质量高度敏感,本文将讨论三种不同的重夸克质量机制,分别是 1S mass, $\overline{\text{MS}}$ mass scheme 和 Pole mass scheme。对于唯象学分析,本文在三种质量方案下对非微扰参数进行了两种情形的全局拟合估计,分别是包含量纲三算符和五算符矩阵元贡献与包含量纲三算符,量纲五算符量纲六算符矩阵元贡献,并就非微扰参数的拟合估计结果进行讨论。最后定性讨论非微扰参数的拟合估计值对 D 介子寿命的影响。

4.1 实验现状

4.1.1 D 介子半轻单举衰变绝对分支比的实验测量

CLEO 合作组于 2009 年对三种 D 介子半轻衰变进行了测量 [4]。他们利用 e^+e^- 对撞,在质心能量 $E_{\text{cm}} = 3.774\text{GeV}$ 处积累了 818pb^{-1} 的 $D^0\overline{D}^0$ 和 D^+D^- 事例,并测量了实验系下电子能谱 ($p_e > 0.2\text{GeV}$) 和衰变分支比。此外,基于已知的遍举衰变数据对电子能谱 ($p_e > 0.2\text{GeV}$) 进行红外端的外推,以测量 $D^0 \rightarrow X e^+ \nu$ 和 $D^+ \rightarrow X e^+ \nu$ 两个过程的电子能谱。对于 D_s^+ 介子,他们在质心能量 $E_{\text{EM}} = 4.170\text{GeV}$ 处积累了 602pb^{-1} 的 $D_s^{*+}D_s^-$ 事例,对 $D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu$ 的衰变分支比和电子能谱 ($p_e > 0.2\text{GeV}$) 进行测量。并基于已知遍举衰变数据实现电子能谱的红外端外推,以获得该过程的电子能谱。CLEO 合作组的测量结果为:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e) &= (6.46 \pm 0.09 \pm 0.11)\%, \\ \mathcal{B}(D^+ \rightarrow X e^+ \nu_e) &= (16.13 \pm 0.10 \pm 0.29)\%, \\ \mathcal{B}(D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e) &= (6.52 \pm 0.39 \pm 0.15)\%,\end{aligned}\tag{4-1}$$

其中,两个误差分别是统计误差和系统误差。此外,他们讨论了 D 介子半轻单举过程 SU(3) 味道对称性的破坏,

$$\begin{aligned}\Gamma(D^+ \rightarrow X e^+ \nu_e) / \Gamma(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e) &= 0.985 \pm 0.015 \pm 0.024, \\ \Gamma(D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e) / \Gamma(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e) &= 0.828 \pm 0.051 \pm 0.025,\end{aligned}$$

与理论预期基本相符。图4-1是 CLEO 合作组对 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 过程电子能谱的测量

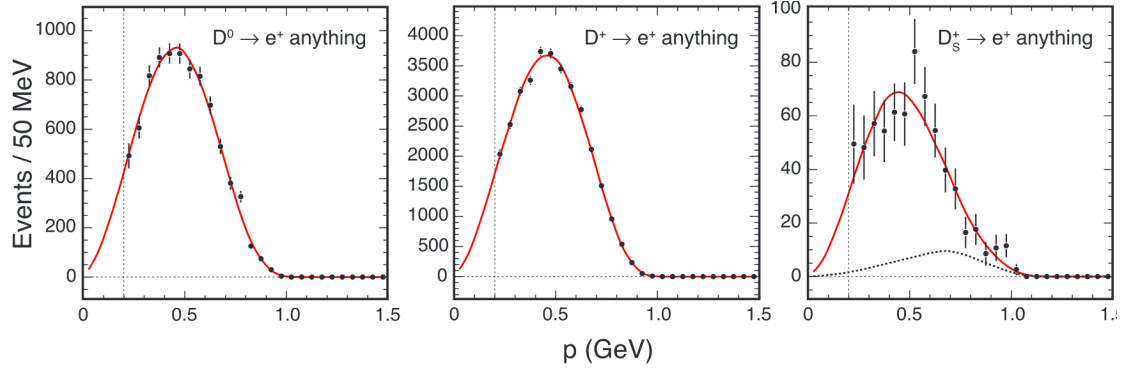


图 4-1 实验室系下 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 衰变过程的电子能谱 [4]
($p_e > 0.2\text{GeV}$)

结果, 其中灰色垂直线表明电子的识别动量被截断于 0.2GeV 处, 误差棒仅包含统计误差。基于已知遍举衰变数据, 红色实线是电子能谱的拟合结果。CLEO 合作组提供了图4-1中对应每个 bin 的具体事例数和对应的统计误差, 如表4-1所示, 对于 D^+ 和 D_s^+ , 已经减除了来自轻子衰变 $\tau^+\nu_\tau$ ($\tau^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\tau$) 的贡献。结果表明 D^0 与 D^+ 介子的衰变电子能谱具有较高精度, 但 D_s^+ 介子的衰变电子能谱的精度较低。我国 BESIII 合作组于 2021 年重新抽取 D_s^+ 介子的衰变电子能谱 [5]。

$p(\text{GeV})$	$\Delta B(D^0 \rightarrow Xe^+\nu_e)(\%)$	$\Delta B(D^+ \rightarrow Xe^+\nu_e)(\%)$	$\Delta B(D_s^+ \rightarrow Xe^+\nu_e)(\%)$
0.200 – 0.250	0.347 ± 0.036	0.912 ± 0.040	0.491 ± 0.152
0.250 – 0.300	0.426 ± 0.030	1.133 ± 0.038	0.470 ± 0.124
0.300 – 0.350	0.576 ± 0.031	1.379 ± 0.041	0.554 ± 0.126
0.350 – 0.400	0.629 ± 0.030	1.462 ± 0.043	0.515 ± 0.120
0.400 – 0.450	0.640 ± 0.031	1.675 ± 0.047	0.578 ± 0.112
0.450 – 0.500	0.640 ± 0.031	1.661 ± 0.046	0.562 ± 0.123
0.500 – 0.550	0.596 ± 0.029	1.546 ± 0.044	0.794 ± 0.127
0.550 – 0.600	0.575 ± 0.029	1.415 ± 0.041	0.611 ± 0.115
0.600 – 0.650	0.492 ± 0.026	1.243 ± 0.038	0.471 ± 0.104
0.650 – 0.700	0.374 ± 0.023	0.946 ± 0.032	0.314 ± 0.087
0.700 – 0.750	0.269 ± 0.019	0.674 ± 0.026	0.246 ± 0.079
0.750 – 0.800	0.230 ± 0.017	0.429 ± 0.019	0.089 ± 0.060
0.800 – 0.850	0.089 ± 0.011	0.240 ± 0.014	0.115 ± 0.060
0.850 – 0.900	0.053 ± 0.008	0.103 ± 0.009	0.037 ± 0.046
0.900 – 0.950	0.021 ± 0.005	0.022 ± 0.004	0.074 ± 0.051
0.950 – 1.000	0.002 ± 0.002	0.004 ± 0.002	0.096 ± 0.045
1.000 – 1.050	0.015 ± 0.022

表 4-1 在实验室系下 D 介子半轻单举衰变过程每个 bin 的部分分支比 [4]

4.1.2 D_s^+ 介子半轻单举衰变绝对分支比的实验测量

BESIII 合作组近期对 D_s^+ 介子半轻单举衰变分支比进行测量 [5]。他们采用双标记技术在 BEPCII 对撞机上质心能量 $E_{\text{cm}} \in [4.178, 4.230] \text{ GeV}$ 处产生的 e^+e^-

湮灭事例进行分析。主要包括：

- 2016 年,在质心能量 $E_{\text{cm}} = 4.178 \text{ GeV}$ 处产生了 3.19 fb^{-1} 的事例, $e^+e^- \rightarrow D_s^{*+}D_s^-$ 产生了大约 6.4×10^6 个 D_s^+ 介子, 以及少量来自 $e^+e^- \rightarrow D_s^+D_s^-$ 的贡献
- 2017 年, 在质心能量 $E_{\text{cm}} \in [4.189, 4.219] \text{ GeV}$ 处产生了 2.08 fb^{-1} 的事例
- 2013 年, 在质心能量 $E_{\text{cm}} \in [4.225, 4.230] \text{ GeV}$ 内收集的 1.05 fb^{-1} 的事例有关 D_s^+ 半轻单举衰变绝对分支比和该过程 $\text{SU}(3)$ 对称性破坏的测量结果为:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e) &= (6.30 \pm 0.13(\text{stat.}) \pm 0.09(\text{syst.}) \pm 0.04(\text{ext.}))\%, \\ \frac{\Gamma(D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e)}{\Gamma(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e)} &= 0.790 \pm 0.016(\text{stat.}) \pm 0.011(\text{syst.}) \pm 0.016(\text{ext.}). \end{aligned} \quad (4-2)$$

式(4-2)中的误差分别是统计误差, 系统误差以及电子动量 $p_e < 0.2 \text{ GeV}$ 区域的外推误差。该结果与 CLEO 合作组的测量结果基本一致, 但 BESIII 合作组的测量精度更高。 D_s 介子半轻单举衰变宽度与 D^0 介子半轻单举衰变宽度的比值偏离 1 反映了 $\text{SU}(3)$ 味道对称性的破坏。

此外, BESIII 合作组基于已知遍举衰变数据对测量得到部分电子能谱进行红外端 ($p_e < 0.2 \text{ GeV}$ 的区域) 外推, 如图4-2所示, 其中黑色带误差棒的点表示每个 bin 内的事例数, 蓝色曲线表示拟合结果。结果表明, BESIII 合作组的测量结果与 CLEO 合作组的测量结果基本一致。此外, BESIII 合作组也提供了 $D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu$

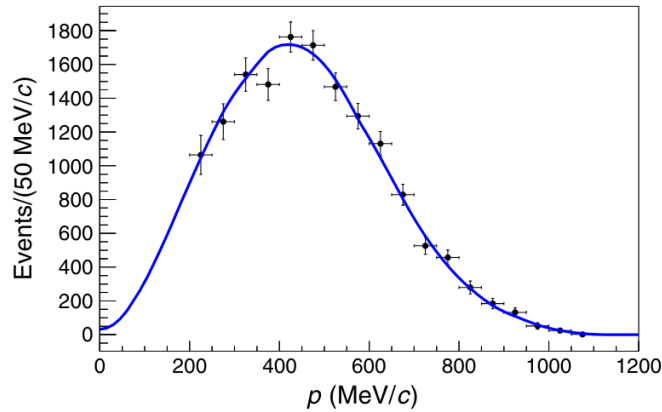


图 4-2 实验室系下 $D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu$ 衰变过程的电子能谱 [5]
($p_e > 0.2 \text{ GeV}$)

过程 (图4-2) 对应每个 bin 的具体事例数与相应的统计误差 (表4-2), 其中双标记侧产额已经经过效率修正和背景减除。

$p_e(\text{MeV}/c)$	$N_{DT,Xe^+\nu}$	$p_e(\text{MeV}/c)$	$N_{DT,Xe^+\nu}$	$p_e(\text{MeV}/c)$	$N_{DT,Xe^+\nu}$	$p_e(\text{MeV}/c)$	$N_{DT,Xe^+\nu}$
200 – 250	1064 ± 115	450 – 500	1713 ± 88	700 – 750	526 ± 51	950 – 1000	52 ± 19
250 – 300	1261 ± 106	500 – 550	1468 ± 82	750 – 800	457 ± 44	1000 – 1050	24 ± 14
300 – 350	1540 ± 99	550 – 600	1294 ± 76	800 – 850	280 ± 38	1050 – 1100	2 ± 6
350 – 400	1482 ± 93	600 – 650	1130 ± 72	850 – 900	184 ± 31	-	-
400 – 450	1762 ± 90	650 – 700	829 ± 62	900 – 950	132 ± 27	-	-

表 4-2 实验室系下 D_s^+ 介子半轻单举衰变过程双标记侧每个 bin 的产额 [5]

4.2 唯象学分析

本节利用表4-1和表4-2的数据，基于重夸克有效理论，对电子能谱的红外区域进行拟合外推并重新抽取其衰变宽度和分支比。此外，本节利用蒙特卡洛方法 (Monte Carlo, MC) 抽取 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 过程的电子能量原点矩。通过洛伦兹变换将其变换至 D 介子质心系并讨论其关联效应。

4.2.1 电子能谱红外区域的理论外推

CLEO 合作组于 2009 年给出实验室系下 $D \rightarrow Xe^+\nu_e$ 的电子能谱 ($p_e > 0.2\text{GeV}$)，在 $p_e < 0.2\text{GeV}$ 区域，由于重夸克有效理论的算符乘积展开不存在奇异行为，因此本文用谱的理论形式拟合前四个 bin 的数据，并将其外推至 $p_e < 0.2\text{GeV}$ 区域。

$$\frac{d\Gamma}{dE_e} = \Gamma_0 a \left(\frac{2}{m_c} \right)^3 E_e^2 \left(1 + b \frac{2E_e}{m_c} \right) \left(1 - \frac{2E_e}{m_c} \right), \quad (4-3)$$

其中 m_c 是粲夸克质量， a, b 是拟合参数， $\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_c^5 (V_{cd}^2 + V_{cs}^2)}{192\pi^3}$ 。本文以 D^0 介子为例讨论红外区域的拟合外推。

为实现更优的拟合效果，并使之与表4-1中前四个 bin 的数据保持一致，需要在理论模型中引入一个标度因子，该因子包括 D^0 介子寿命以及相应的量纲转换因子 g 。

$$\Delta Br_i = \frac{\Delta \Gamma_i}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} dx = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} \Delta x_i = g \tau_{D^0} \frac{d\Gamma}{dx} \Delta x_i, \quad (4-4)$$

其中，指标 i 是每个 bin 的编号， $m_c \Delta x_i / 2$ 是电子能量的 bin 宽度。 τ_{D^0} 是 D^0 介子寿命，为 $410.3 \pm 1.510^{-15} \text{s}$ ；粲夸克质量采取 $\overline{\text{MS}}$ 质量方案， $m_c = \overline{m}_c(1.27\text{GeV}) = 1.27\text{GeV}$ ， $V_{cs} = 0.975$ ， $V_{cd} = 0.221$ 。

定义 χ^2 函数如下

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\Delta Br_{i,\text{theory}} - \Delta Br_{i,\text{exp}}}{\Delta Br_{i,\sigma}} \right)^2, \quad (4-5)$$

其中 $\Delta Br_{i,\sigma}$ 是每个 bin 分支比的标准误差， $\Delta Br_{i,\text{theory}}$ 是每个 bin 的理论预言值， $\Delta Br_{i,\text{exp}}$ 是每个 bin 的实验观测中心值。拟合结果表明： $\chi_{\min}^2 = 1.2618$ ， $a \rightarrow \hat{a} =$

0.49, $b \rightarrow \hat{b} = 0.40$. 表4-1前四个 bin 数据的误差最终体现于拟合参数 \hat{a}, \hat{b} 的拟合估计误差。

$$\left(\mathbf{V}^{-1}(\hat{\theta}) \right)_{ij} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{\theta=\hat{\theta}} \quad i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (4-6)$$

式(4-6)中, \mathbf{V} 是拟合模型里参数的协方差矩阵, θ 是理论模型中的参数, $\hat{\theta}$ 是理论模型中的参数的拟合估计值。对拟合参数的协方差矩阵进行平方根运算, 此时矩阵的对角元是拟合参数的标准误差。拟合结果表明:

$$\chi_{min}^2 = 0.6, \quad a \rightarrow \hat{a} = 0.49(12), \quad b \rightarrow \hat{b} = 0.40(57).$$

考虑到拟合曲线在每个 bin 内的非线性行为, 基于式(4-3)对表4-1中前四个 bin 的数据在积分意义上进行标度转换, 以将其映射至 $p_e < 0.2\text{GeV}$,

$$\Delta \text{Br}[i] = \frac{\int_{0.05i}^{0.05(i+1)} g \tau_{D^0} \frac{d\Gamma}{dE_e} dE_e}{\int_{0.2}^{0.4} g \tau_{D^0} \frac{d\Gamma}{dE_e} dE_e}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4-7)$$

电子能量位于 0 到 0.2GeV 区域的数据如表4-3所示,

E_e/GeV	$\Delta B(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e) (\%)$	E_e/GeV	$\Delta B(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e) (\%)$
0-0.05	0.0072 ± 0.0015	0.1-0.15	0.122 ± 0.016
0.05-0.1	0.048 ± 0.008	0.15-0.2	0.222 ± 0.021

表 4-3 D^0 介子半轻单举衰变电子能谱红外区域外推结果

CLEO 合作组在衰变分支比的水平上给出了相应统计误差和系统误差, 即

$$\mathcal{B}(D^0 \rightarrow X e^+ \nu_e) = (6.46 \pm 0.09 \pm 0.11)\%, \quad (4-8)$$

出于保守考虑, 本文假设每个 bin 的系统误差与中心值的比值相同, 即各个 bin 之间的系统误差完全相关。由于 CLEO 合作组并未提供各个 bin 的具体系统误差, 本文采用一种简化方法, 将衰变分支比中系统误差与中心值的比值延拓至电子能量 bin 的水平。即每个 bin 的系统误差与中心值比值被假设为一个固定值且与衰变分支比中该比值保持一致。

具体地, 基于蒙特卡洛技术以 0 为中心值、0.11/6.46 作为标准误差生成一组衰变分支比水平上系统误差与中心值的比值, 这组比值有 200000 个点。假设每个 bin 的分支比服从正态分布, 以每个 bin 的右端点作为中心值, 系统误差作为标准误差生成一个 20×200000 数据集。每个 bin 的每格数据点与其系统误差带来的扰动相加和, 可得 D^0 介子半轻单举衰变电子能谱的数据集。该数据集的每

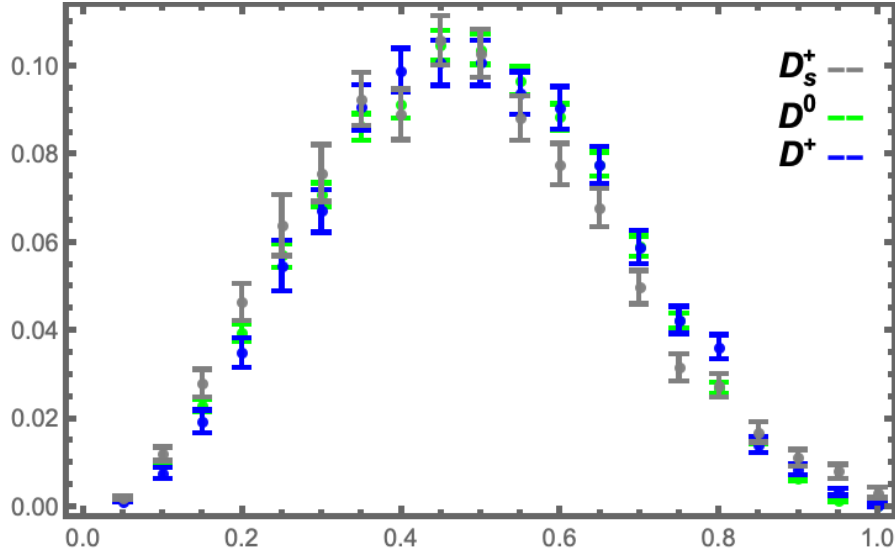


图 4-3 实验室系下 $D \rightarrow Xe^+\nu_e$ 衰变过程归一化的电子能谱

个电子能量 bin 包含 200000 个服从正态服从的数据点，且该正态分布的标准误差同时包含系统误差和统计误差。完整电子能谱数据点如图4-3所示。

D^+ 介子半轻单举衰变电子能谱的拟合外推与 D^0 介子基本一致，对应的电子能谱如图4-3所示。上述讨论及结果将为我们抽取 $D^{0,+}$ 介子的物理可观测量奠定基础。

本文的工作基于 BESIII 合作组的数据对 $D_s^+ \rightarrow Xe^+\nu_e$ 过程物理可观测量进行抽取和全局拟合，与 D 介子处理方法类似，本文基于重夸克有效理论提出的拟合模型 (式(4-3)) 对表4-2中前四个 bin 的数据进行拟合，随后基于拟合结果在积分意义上讲其标度转换至 $p_e < 0.2\text{GeV}$ 区域。

为实现更优的拟合效果，并使之与表4-2中前四个 bin 的数据保持一致，需要在理论模型中引入标度因子，该因子包括 D_s^+ 介子寿命、相应的量纲转换因子和一个经验系数 $s=1000$ 。CKM 矩阵元取值与上节一致。于 D_s^+ 介子寿命的取值来源于 PDG，为 $(1033 \pm 5) \times 10^{-15}s$ 。

$$\Delta N_i = \frac{\Delta N_i}{N} N = \frac{\Delta \Gamma_i}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dE_e} dE_e = \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dE_e} \Delta(E_e)_i = sg\tau_{D^0} \frac{d\Gamma}{dE_e} \Delta(E_e)_i, \quad (4-9)$$

总事例数 N 被吸收至 $\frac{d\Gamma}{dE_e}$ 中并反映于拟合参数的拟合估计值上。

定义 χ^2 函数如下，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\Delta N_{i,\text{theory}} - \Delta N_{i,\text{exp}}}{\Delta N_{i,\sigma}} \right)^2 \quad (4-10)$$

其中， $\Delta N_{i,\sigma}$ 是第 i 个 bin 的事例数的标准误差， $\Delta N_{i,\text{theory}}$ 是第 i 个 bin 事例数的理论预言， $\Delta N_{i,\text{exp}}$ 是第 i 个 bin 的事例数的实验观测中心值。拟合结果为：

$$\chi_{\min}^2 = 0.896179, a \rightarrow \hat{a} = 188.748 \pm 31.843, b \rightarrow \hat{b} = -0.641 \pm 0.217$$

基于拟合结果, 在积分意义上, 将表4-2前四个 bin 的数据延拓至 $p_e < 0.2\text{GeV}$ 区域, 可得对应区域的四个数据点。采用于 D 介子处理系统误差类似的方法可得 $D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e$ 过程的电子能谱。同样的, 我们做类似于 D^0 介子的非线性外推可得 $p_e < 0.2\text{GeV}$ 区域的四个数据点。对应完整电子能谱如图4-3所示。

基于拟合外推, 可得三种 D 介子半轻单举衰变的完整电子能谱的数据集, 后续将基于这些数据集进行物理可观测量的抽取。

4.2.2 物理可观测量的抽取

本节将基于这三组数据集进行衰变分支比、衰变宽度、电子能量原点矩以及电子能量中心矩的抽取。此外本节还将给出这些物理可观测量之间的关联矩阵，并最终确定用于全局拟合的物理可观测量。

一. 衰变宽度 (衰变分支比) 的抽取

$D^{0,+}$ 介子 对每个 bin 的第 j 个数据进行求和，即第 j 个衰变分支比；第 j 个衰变宽度是 $\Gamma_j = \sum_{i=1}^{N_{\text{bin}}} x \Delta \text{Br}[i, j] / \tau$ ，其中 x 是量纲转换因子，将 s^{-1} 转换到 GeV， $i = 1, 2, 3, \dots, 200000$ 。

D_s 介子 由于探测器只能在超过某一动量阈值时才能识别和重建正电子轨迹，因此仅接受动量 $p > 0.2 \text{ GeV}$ 的双标记候选轨迹。作为电子动量 p_e 的函数，微分衰变分支比为：

$$\frac{d\mathcal{B}_{\text{SL}}}{dp_e} = \frac{\Delta \left(\frac{n_{\text{DT}}}{\epsilon_{\text{DT}}} \right) / \Delta p_e}{n_{\text{ST}} / \epsilon_{\text{ST}}} = \frac{\left(\frac{\Delta n_{\text{DT}}}{\epsilon_{\text{sig}}} \right) / \Delta p_e}{n_{\text{ST}} \frac{\epsilon'_{\text{ST}}}{\epsilon_{\text{ST}}}} = \frac{\Delta n_{\text{DT}} / \Delta p_e}{n_{\text{ST}} b_{\text{tag}}}. \quad (4-11)$$

其中， n_{ST} 是观察到的单标记事件的事例数， Δn_{DT} 是在特定的 p_e 区间内观察到的半轻衰变双标记事件的事例数， ϵ_{ST} 和 ϵ_{DT} 分别是单标记侧和双标记侧的重建效率。定义 $\epsilon_{\text{DT}} = \epsilon'_{\text{ST}} \times \epsilon_{\text{sig}}$ ，其中 ϵ_{sig} 是信号侧具有电子动量依赖的重建效率， ϵ'_{ST} 是给定信号事件在反冲侧存在时的标记侧重建效率， $b_{\text{tag}} \equiv \frac{\epsilon_{\text{ST}}}{\epsilon'_{\text{ST}}}$ ，它考虑了在反冲侧存半轻衰变时，单标记探测效率的差异，并且 Δn_{DT} 是在特定 p_e 区间内的单标记样本中双标记信号事例的真实数量。对 E_e 进行积分可得衰变分支比的表达式：

$$\mathcal{B}(D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e) = \frac{N_{\text{DT}}}{n_{\text{ST}} b_{\text{tag}}}, \quad (4-12)$$

其中，BESIII 合作组基于 MC 模拟的 b_{tag} 和已经确定的单标记事例提供了每组数

Dataset	Fitted single-tag yields(n_{ST})
$E_{\text{cm}} = 4.178 \text{ GeV}$	147581 ± 779
$E_{\text{cm}} = 4.189 - 4.219 \text{ GeV}$	85845 ± 705
$E_{\text{cm}} = 4.225 - 4.230 \text{ GeV}$	29234 ± 435
Sum	262660 ± 1137

表 4-4 $D_s^+ \rightarrow X e^+ \nu_e$ 过程每个能量点的单标记产额

据中拟合得到的单标记产额¹(表4-4) 和每组数据的 b_{tag} (表4-5) 本文基于式(4-12),

¹仅包含统计误差

Dataset	ϵ_{ST}	b_{tag}	b_{tag}^r
$E_{cm} = 4.178\text{GeV}$	$(43.10 \pm 0.01)\%$	1.007 ± 0.001	1.037 ± 0.003
$E_{cm} = 4.189 - 4.219\text{GeV}$	$(42.46 \pm 0.02)\%$	1.004 ± 0.002	1.034 ± 0.004
$E_{cm} = 4.225 - 4.230\text{GeV}$	$(40.48 \pm 0.03)\%$	1.005 ± 0.003	1.044 ± 0.007

表 4-5 $D_s^+ \rightarrow Xe^+ \nu_e$ 过程每个能量点的单标记效率

利用 MC 模拟计算 $D_s^+ \rightarrow Xe^+ \nu_e$ 过程的衰变分支比和的衰变宽度。

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(D^0 \rightarrow Xe^+ \nu_e) &= 0.0636(15), \\ \mathcal{B}(D^+ \rightarrow Xe^+ \nu_e) &= 0.1602(32), \\ \mathcal{B}(D_s^+ \rightarrow Xe^+ \nu_e) &= 0.0631(14).\end{aligned}\tag{4-13}$$

基于上述讨论, D_s^+ , D^0 和 D^+ 衰变分支比如上式所示, 它们与 BESIII, CLEO 合作组的结果高度一致。

二. 电子能量矩的抽取: 以 D_s 介子为例

理论上电子能量矩的定义如下,

$$\langle E_e^n \rangle = \frac{1}{\Gamma} \int E_e^n \frac{d\Gamma}{dE_e} dE_e, \tag{4-14}$$

其中, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。实验测量过程中, 为了方便起见将连续的电子能量相空间离散化并将积分转变为求和,

$$\langle E_e^n \rangle = \frac{1}{\Gamma} \int \frac{d\Gamma}{dE_e} dE_e = (E_e^n)_i \sum_i \frac{\Delta\Gamma_i}{\Gamma} = (E_e^n)_i \sum_i \frac{\Delta N_i}{N}, \tag{4-15}$$

其中, N 是总事例数, i 是 bin 的编号。尽管实验测量过程中将相空间离散化成很多个 bin 且对每个 bin 内的数据不做区分, 本文依然考虑了每个 bin 内电子能量的涨落, 即认为第 i 个 bin 内的电子能量服从 uniform distribution。本文抽取出实验室系下的前四阶电子能量原点矩, 如图4-4所示,

在与电子能量前四阶原点矩的理论表达式进行拟合之前, 需通过洛伦兹变换将实验室系下的观测量转换至 D_s^+ 质心系。电子能量在 D_s^+ 在实验室系与质心系下的关系为:

$$E_e' = \gamma E_e (1 - \beta \cos \theta), \tag{4-16}$$

其中, E_e 是电子在 D_s^+ 质心系中的能量, $\beta, \gamma = 1/(\sqrt{1 - \beta^2})$ 是初级顶点上 D_s^+ 介子的洛伦兹变换因子, θ 是电子动量在 D_s^+ 质心系中的方向与实验室参考系中 D_s^+ 介子动量之间的夹角。由于 D_s^+ 介子的自旋为零, θ 的分布是均匀的。可得实验

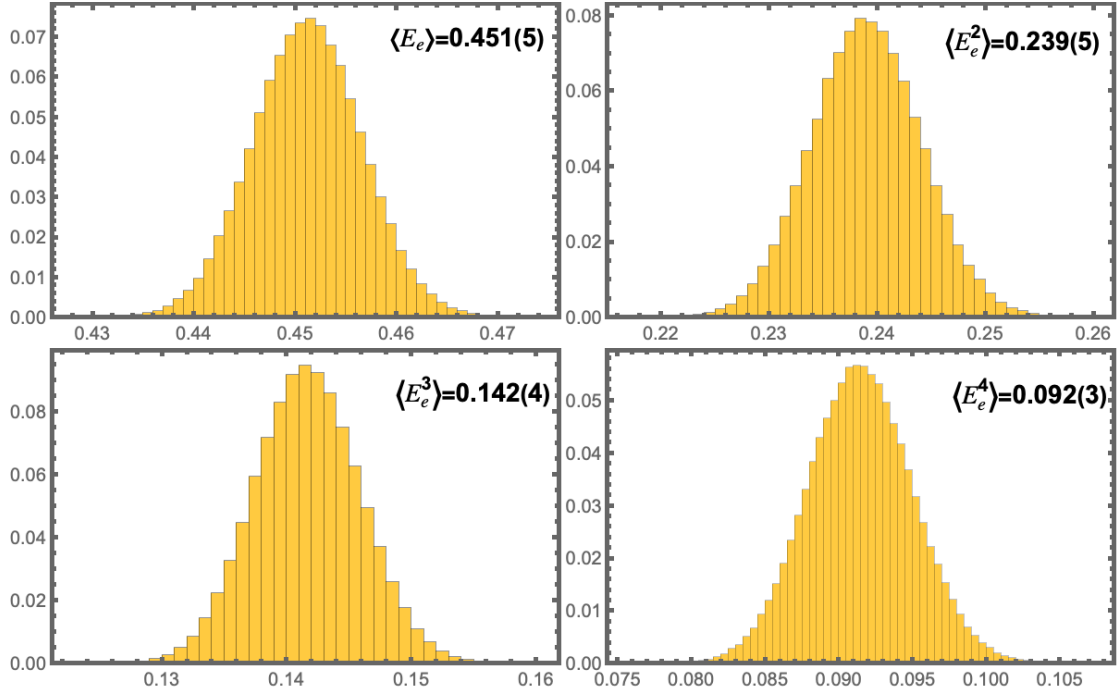


图 4-4 实验室系下 $D \rightarrow Xe^+ \nu_e$ 衰变过程的前四阶电子能量矩的概率密度分布

室系下电子能量原点矩和质心系下电子能量原点矩之间的关系为：

$$\begin{aligned} \langle E_e \rangle_{\text{lab}} &= \gamma \langle E_e \rangle, & \langle E_e^2 \rangle_{\text{lab}} &= \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right) \gamma^2 \langle E_e^2 \rangle, \\ \langle E_e^3 \rangle_{\text{lab}} &= (1 + \beta^2) \gamma^3 \langle E_e^3 \rangle, & \langle E_e^4 \rangle_{\text{lab}} &= \left(1 + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{5}\right) \gamma^4 \langle E_e^4 \rangle. \end{aligned} \quad (4-17)$$

表4-4给出了 BESIII 合作组实际测量过程中使用的能量点和对应 D_s 的估计事例数。 e^+e^- 对撞产生的 D_s, D_s^* 在实验室系下的动量满足：

$$\sqrt{p^2 + m_{D_s}^2} + \sqrt{p^2 + m_{D_s^*}^2} = E_{\text{cm}}, \quad (4-18)$$

其中, D_s^+ 介子的质量为 $1.96835 \pm 0.00007 \text{ GeV}$, D_s^{*+} 介子质量为 $2.1122 \pm 0.0004 \text{ GeV}$ 。本文在六个能量点上计算了对应 D_s, D_s^* 的洛伦兹因子 γ , 并将每个能量点上 D_s^+ 介子的事例数作为权重进行加权求和。最终采用的 γ 是 D_s^+ 和 D_s^{*+} 介子的算术平均,

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.02732 \pm 0.00009, \\ \beta &= 0.2291 \pm 0.0004, \end{aligned} \quad (4-19)$$

由于洛伦兹变换因子不确定度较低, 因此本文后续的分析将不考虑洛伦兹变换因子的误差。

至此可得 D_s 静止系的电子能量前四阶矩。应用类似的方法, 可得 D^0, D^+ 介

子质心系的电子能量前四阶矩为：

$$\begin{aligned} \langle E_e \rangle_{\text{exp}}^{D_s} &= 0.439(5) \text{ GeV}, \quad \langle E_e^2 \rangle_{\text{exp}}^{D_s} = 0.223(5) \text{ GeV}^2, \quad \langle E_e^3 \rangle_{\text{exp}}^{D_s} = 0.124(4) \text{ GeV}^3, \quad \langle E_e^4 \rangle_{\text{exp}}^{D_s} = 0.074(3) \text{ GeV}^4, \\ \langle E_e \rangle_{\text{exp}}^{D^0} &= 0.462(5) \text{ GeV}, \quad \langle E_e^2 \rangle_{\text{exp}}^{D^0} = 0.242(5) \text{ GeV}^2, \quad \langle E_e^3 \rangle_{\text{exp}}^{D^0} = 0.138(4) \text{ GeV}^3, \quad \langle E_e^4 \rangle_{\text{exp}}^{D^0} = 0.084(3) \text{ GeV}^4, \\ \langle E_e \rangle_{\text{exp}}^{D^+} &= 0.455(4) \text{ GeV}, \quad \langle E_e^2 \rangle_{\text{exp}}^{D^+} = 0.236(4) \text{ GeV}^2, \quad \langle E_e^3 \rangle_{\text{exp}}^{D^+} = 0.134(3) \text{ GeV}^3, \quad \langle E_e^4 \rangle_{\text{exp}}^{D^+} = 0.081(3) \text{ GeV}^4. \end{aligned} \quad (4-20)$$

事实上，电子能量原点矩之间存在一定的关联，因此讨论其关联系数并尽可能的降低其关联程度是必要的。

具体而言，本文通过计算皮尔逊积矩系数（Pearson's product-moment coefficient, PPMC）以实现电子能量矩的关联的定量分析。

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} = \text{corr}(X,Y) &= \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad \text{if } \sigma_X \sigma_Y > 0. \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}, \end{aligned} \quad (4-21)$$

其中， X 和 Y 是任意两组随机变量， E 是期望值算符， cov 是协方差， corr 是 PPMC 的另一种符号， σ 是随机变量的标准误差，事实上这是柯西-施瓦茨 (Cauchy-Schwarz) 不等式的推论，要求即 PPMC 的绝对值不大于一。因此，相关系数的取值范围在 -1 和 +1 之间。当存在完全正向（递增）线性关系（相关）时，相关系数为 +1；当存在完全反向（递减）线性关系（反相关）时 [65]，相关系数为 -1；在其他情况下，相关系数的值位于开区间 $(-1, 1)$ 之间，表示变量之间的线性依赖程度。当相关系数接近零时，表示变量之间的关系较弱（接近无相关性）。相关系数越接近 -1 或 +1，变量之间的相关性越强。

事实上 PPMC 仅表征两个变量之间的线性依赖程度，PPMC 等于零是任意两组随机变量相互独立的必要条件，且无法完全表征两组随机变量之间的关系 [66] (PPMC 是充分统计量的前提是随机变量服从多元正态分布)。

本文讨论了三种 D 介子的衰变宽度和电子能量原点矩的关联矩阵，为确保准确性，通过散点分布图以实现视觉检查是必要的 (D_s^+ 为例)。如图4-5所示，自上（左）到下（右）分别是衰变宽度与电子能量前四阶原点矩。

结果表明图4-5与式(4-22)的结论保持一致，即衰变宽度与前四阶矩存在微弱

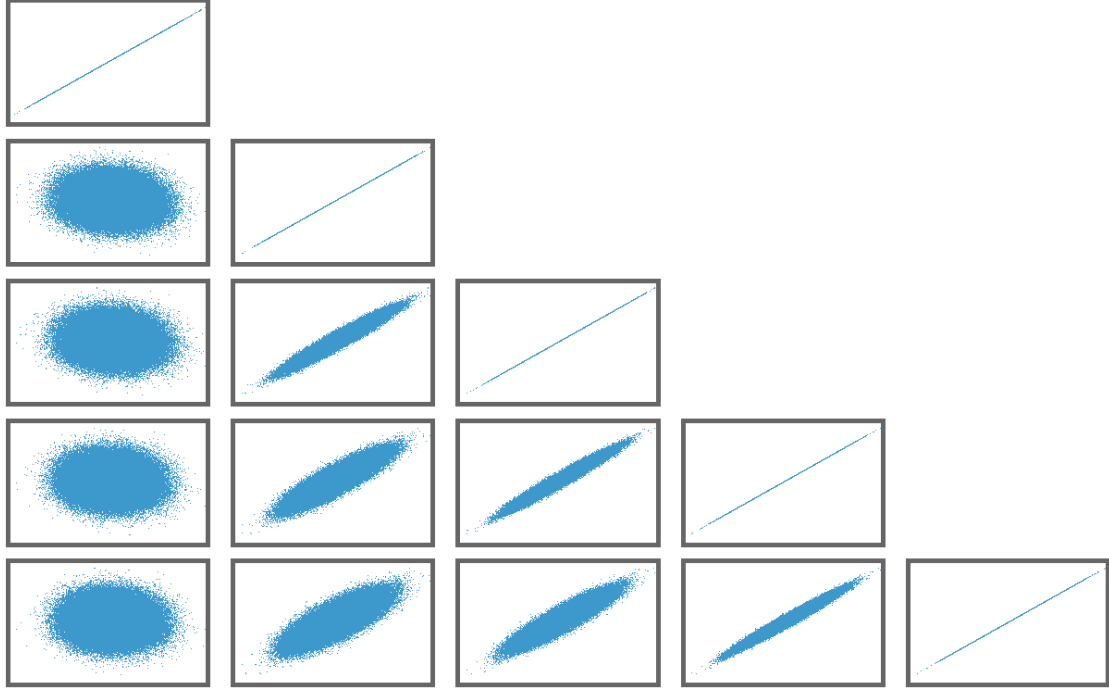


图 4-5 $D_s^+ \rightarrow Xe^+ \nu_e$ 衰变过程的衰变宽度与前四阶电子能量原点矩的联合分布

负关联且电子能量 i 阶原点矩与电子能量 j 阶原点矩关联程度较强。

$$\text{Cor}(D^0) = \begin{pmatrix} 1. & -0.0764818 & -0.0682164 & -0.0584038 & -0.049709 \\ -0.0764818 & 1. & 0.964628 & 0.888372 & 0.799743 \\ -0.0682164 & 0.964628 & 1. & 0.976053 & 0.921246 \\ -0.0584038 & 0.888372 & 0.976053 & 1. & 0.982859 \\ -0.049709 & 0.799743 & 0.921246 & 0.982859 & 1. \end{pmatrix},$$

$$\text{Cor}(D^+) = \begin{pmatrix} 1. & -0.00918393 & -0.0111696 & -0.011663 & -0.0114986 \\ -0.00918393 & 1. & 0.959852 & 0.877876 & 0.784972 \\ -0.0111696 & 0.959852 & 1. & 0.974619 & 0.917145 \\ -0.011663 & 0.877876 & 0.974619 & 1. & 0.982034 \\ -0.0114986 & 0.784972 & 0.917145 & 0.982034 & 1. \end{pmatrix},$$

(4-22)

$$\text{Cor}(D_s^+) = \begin{pmatrix} 1. & -0.0948363 & -0.0854423 & -0.0692735 & -0.0528099 \\ -0.0948363 & 1. & 0.961103 & 0.877715 & 0.779303 \\ -0.0854423 & 0.961103 & 1. & 0.973193 & 0.910118 \\ -0.0692735 & 0.877715 & 0.973193 & 1. & 0.979699 \\ -0.0528099 & 0.779303 & 0.910118 & 0.979699 & 1. \end{pmatrix}.$$

为了实现对非微扰参数拟合估计的较强约束,降低物理可观测量之间的关联程度是必要的。本文发现存在一组物理可观测量,即 D 介子半轻单举衰变宽度,

电子能量一阶原点矩，二三四阶中心矩，其关联程度显著降低。电子能量 n 阶中心矩的定义如下，

$$\langle E_e^n \rangle_{\text{center}} \equiv \langle (E_e - \langle E_e \rangle)^n \rangle, \quad (4-23)$$

此外本文也给出了该组物理可观测量的实验抽取结果（表4-6）。为了避免该组物理可观测量之间的协方差矩阵出现病态行为¹，需对该组物理可观测量进行重新标度。对应的重标度因子分别是，

$$\{10^{15}, 10^3, 10^3, 10^4, 10^4\} \quad (4-24)$$

基于重标度因子可得该组物理可观测量重标度之后的关联矩阵（式(4-25)），

	$\langle E_e^2 \rangle_{\text{center}}/\text{GeV}^2$	$\langle E_e^3 \rangle_{\text{center}}/\text{GeV}^3$	$\langle E_e^4 \rangle_{\text{center}}/\text{GeV}^4$
D_s^+	0.0297(13)	0.0004(4)	0.0021(2)
D^0	0.0287(12)	-0.0001(3)	0.0019(1)
D^+	0.0291(11)	-0.0002(3)	0.0019(1)

表 4-6 物理可观测量的实验观测值

$$\begin{aligned} \text{Cor}(D^0) &= \begin{pmatrix} 1. & -0.0764818 & 0.0281587 & 0.0330765 & 0.0102788 \\ -0.0764818 & 1. & -0.088841 & -0.444378 & -0.0618813 \\ 0.0281587 & -0.088841 & 1. & -0.00420729 & 0.817582 \\ 0.0330765 & -0.444378 & -0.00420729 & 1. & -0.0351105 \\ 0.0102788 & -0.0618813 & 0.817582 & -0.0351105 & 1. \end{pmatrix}, \\ \text{Cor}(D^+) &= \begin{pmatrix} 1. & -0.00918393 & -0.00799742 & 0.00816853 & -0.0107153 \\ -0.00918393 & 1. & -0.0423819 & -0.456701 & -0.0390424 \\ -0.00799742 & -0.0423819 & 1. & -0.0538756 & 0.809543 \\ 0.00816853 & -0.456701 & -0.0538756 & 1. & -0.0924318 \\ -0.0107153 & -0.0390424 & 0.809543 & -0.0924318 & 1. \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4-25)$$

$$\text{Cor}(D_s^+) = \begin{pmatrix} 1. & -0.0948363 & 0.0254998 & 0.0800786 & 0.00809594 \\ -0.0948363 & 1. & -0.047314 & -0.40486 & -0.0191632 \\ 0.0254998 & -0.047314 & 1. & 0.0763575 & 0.800281 \\ 0.0800786 & -0.40486 & 0.0763575 & 1. & 0.172337 \\ 0.00809594 & -0.0191632 & 0.800281 & 0.172337 & 1. \end{pmatrix}.$$

¹对某矩阵取逆，出现发散，则称原矩阵为病态矩阵。在计算机数值计算中，由于有限的精度，病态矩阵的逆可能会导致数值结果变得非常大或无穷大（即发散），使得结果没有意义

其中，每一行（列）自左（上）而（下）分别是 D 介子半轻单举衰变宽度，电子能量一阶矩，电子能量第二、三、四阶中心矩。式(4-25)中的非对角元相比4-22更接近零，这表明新的这组物理可观测量之间的关联强度比使用 { 衰变宽度，电子能量前四阶原点矩 } 显著降低。本文以 D_s^+ 为对应的该组物理可观测量为例给出联合分布（图4-6）以实现视觉检验。

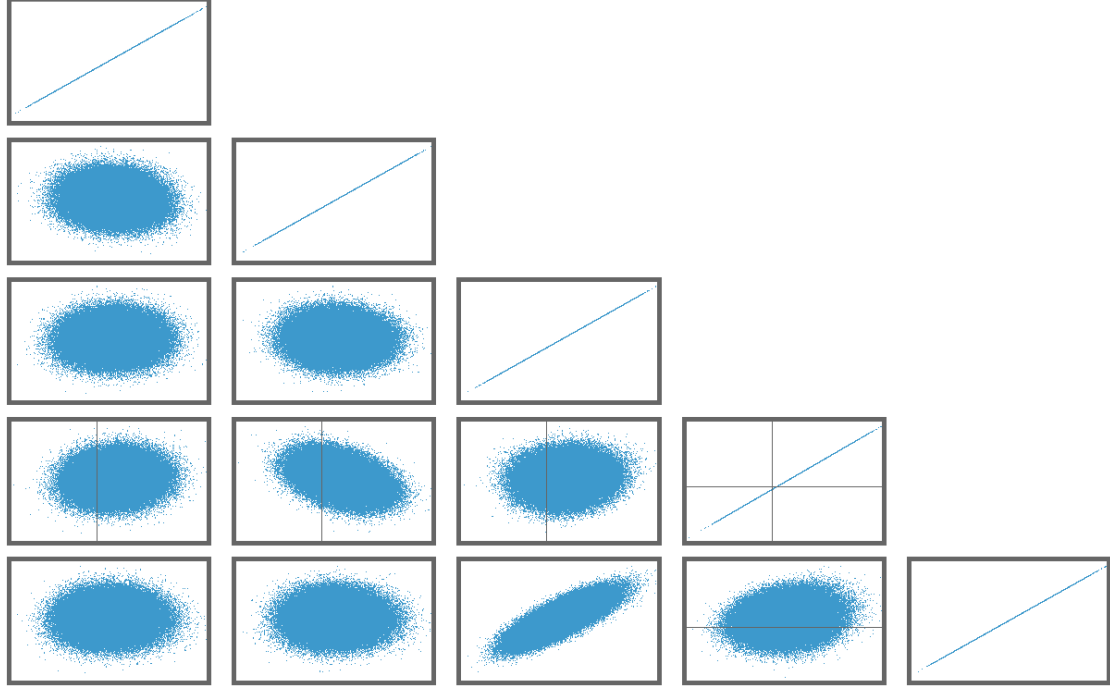


图 4-6 $D_s^+ \rightarrow Xe^+ \nu_e$ 衰变过程的衰变宽度、电子能量一阶原点矩与二、三、四阶中心矩的联合分布

本节以 D_s^+ 为例讨论了电子能量原点矩的抽取，并将其转换到 D_s^+ 的质心系；引入 PPMC 以讨论它们之间的关联强度（式(4-22)）并与视觉检验（图4-5）形成交叉检验。结果表明：电子能量前四阶原点矩之间存在较强关联，为了对非微扰参数实现更强约束，本文重新抽取了一组物理可观测量：衰变宽度、电子能量一阶原点矩和电子能量第二、三、四阶中心矩。同样地，本文也讨论了它们的关联程度（式(4-25)和图4-6）。结果表明新的一组物理可观测量之间的关联强度普遍比前者要显著降低，这将有助于对非微扰参数的拟合估计提供更强约束。

4.2.3 重夸克质量方案

第三章在 Pole mass scheme 下给出了衰变宽度和电子能量前四阶原点矩的理论表达式，并且发现物理可观测量对粲夸克质量高度敏感。事实上用作为重夸克有效理论拉格朗日量参数之一的 Pole mass 表示的衰变宽度，其高阶微扰修正收敛性非常差。此外不同的 charm mass scheme 下的粲夸克质量不确定度较低，由于物理可观测量有限，因此本文不对粲夸克质量进行抽取。

由于量子色动力学的夸克禁闭效应导致实验上无法直接测量夸克质量，因此选择适当的质量方案对 D 介子衰变宽度的理论计算具有关键性的作用。

在壳重整化方案要求在微扰论的每一阶重夸克传播子的逆等于零，对应的重夸克质量称为极质量。尽管极质量作为重夸克有效理论的基本参数之一，但这种质量定义并不是一个好的选择，因为它存在重整化模糊性。这种模糊性表现为极点质量与短程质量的微扰展开级数的收敛性较差，例如在重整化能标 $\mu = 1.27\text{GeV}$ 处极质量和 $\overline{\text{MS}}$ 质量之间的转换关系为：

$$\begin{aligned} m_c^{\text{Pole}} &= \bar{m}_c(\bar{m}_c) \left[1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s(\bar{m}_c)}{\pi} + 10.43 \left(\frac{\alpha_s(\bar{m}_c)}{\pi} \right)^2 + 116.5 \left(\frac{\alpha_s(\bar{m}_c)}{\pi} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \bar{m}_c(\bar{m}_c) [1 + 0.1642 + 0.1582 + 0.2176 + \dots]. \end{aligned} \quad (4-26)$$

事实上，如果使用 $\overline{\text{MS}}$ 质量表示 D 介子单举衰变宽度，由于重整化能标过于靠近非微扰区域导致其微扰级数的收敛性同样不理想，另一方面，在非常低的尺度下， $\overline{\text{MS}}$ 质量的对数演化是非物理的 [67]。为了获得收敛行为良好的微扰展开级数需要合适的粲夸克质量方案。在底强子单举衰变中应用非常成功的质量方案被称为动力学质量方案，其截断能标远离非微扰区域。动力学质量方案和极质量方案之间的关系为 [68]：

$$m_Q^{\text{kin}}(\mu) = m_Q^{\text{Pole}} - [\bar{\Lambda}(\mu)]_{\text{pert}} - \frac{1}{2m_Q^{\text{kin}}(\mu)} [\mu_\pi^2(\mu)]_{\text{pert}} + O\left(\frac{1}{(m_Q^{\text{kin}})^2}\right), \quad (4-27)$$

其中 Q 是重夸克， $\bar{\Lambda}$ 和 μ_π^2 的领头阶的表达式为 [68]：

$$\begin{aligned} [\bar{\Lambda}(\mu)]_{\text{pert}} &= \frac{16}{9} \frac{\alpha_s}{\pi} \mu + O(\alpha_s^2), \\ [\mu_\pi^2(\mu)]_{\text{pert}} &= \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \mu^2 + O(\alpha_s^2), \end{aligned} \quad (4-28)$$

μ 是截断能标。在动力学质量方案下，极质量中的微扰级数被 $[\bar{\Lambda}(\mu)]_{\text{pert}}$ 和 $[\mu_\pi^2(\mu)]_{\text{pert}}$ 修改。此外，重夸克有效理论中的参数也将被重新定义 [69, 70]，

$$\begin{aligned} \mu_\pi^2 &= \mu_\pi^{2,\text{kin}} + [\mu_\pi^2(\mu)]_{\text{pert}} = \mu_\pi^{2,\text{kin}} + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \mu^2, \\ \rho_D^3 &= \rho_D^{3,\text{kin}} + [\rho_D^3(\mu)]_{\text{pert}} = \rho_D^{3,\text{kin}} + \frac{8}{9} \frac{\alpha_s}{\pi} \mu^3. \end{aligned} \quad (4-29)$$

重夸克有效理论中 $(\Lambda_{\text{QCD}}/m_Q)^n$ 的项产生了 $(\frac{\alpha_s}{\pi}) \frac{\mu^n}{m_Q^n}$ 阶的修正，这使得截断尺度的选择窗口很小。一方面，它必须比重夸克质量小，使得 $\frac{\mu}{m_Q}$ 是一个收敛行为良好的展开参数；另一方面，它应该处于微扰区域。截断能标在 $\mu = 1\text{GeV}$ 的动力学质量方案已成功应用于 B 介子单举衰变（参见例如 [71, 72]）。

对于本文研究的粲介子单举衰变若存在类似的动力学质量方案，则其截断能标 μ 的选择窗口显著降低。

本文采用的质量方案之一是 $\overline{\text{MS}}$ 质量方案，并在两圈图水平上将其转换为极质量 [73]，如式(4-30)所示，

$$m_c^{\text{pole}} = m_c + m_c \frac{\left(\frac{4}{3} + \log\left[\frac{\mu^2}{m_c^2}\right]\right) \alpha_s}{\pi} + m_c \frac{\alpha_s^2 \left(\frac{779}{96} + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{9}\pi^2 \log[2] + \frac{415}{72} \log\left[\frac{\mu^2}{m_c^2}\right] + \frac{37}{24} \log\left[\frac{\mu^2}{m_c^2}\right]^2 - \frac{\zeta(3)}{6}\right)}{\pi^2}, \quad (4-30)$$

其中， m_c 是 $\overline{\text{MS}}$ 质量方案下的粲夸克质量， m_c^{pole} 是极质量方案下的粲夸克质量， μ 是重整化能标。

本文采用的另外一个质量方案是 1S 质量方案，1S 质量主要应用于夸克的束缚态质量，如底夸克和粲夸克，尤其是在强相互作用下产生的夸克对中，比如 Υ 和 J/ψ 这样的 $q\bar{q}$ 束缚态。文献 [74] 给出了两圈图水平上 1S 质量和极质量之间的转换关系。对其取逆并展开到 ϵ^2 阶，得到极质量与 1S 质量之间的转换关系，如式(4-31)所示，

$$m_c^{\text{Pole}} = m_c + \frac{2}{9} m_c \epsilon \alpha_s^2 - \frac{\epsilon^2 m_c \left(-\frac{12992\alpha_s^3}{9} - \frac{3200}{3} \log\left[\frac{3\mu}{4m_c\alpha_s}\right] \alpha_s^3 - \frac{256\pi\alpha_s^4}{9}\right)}{576\pi}, \quad (4-31)$$

其中， m_c 是 1S 质量方案下的粲夸克质量， ϵ 是 1S 质量方案下的展开参数， ϵ 的线性项表示单圈水平，平方项表示两圈图水平。取 J/ψ 质量的 1/2 作为粲夸克的 1S 质量，即 $m_c = 1.55\text{GeV}$ 。此外本文计算了 1S 质量方案下 D 介子半轻单举衰变宽度的微扰展开级数为

$$\Gamma_{\text{sl}}^{\text{D}} \sim 1 - 0.131 - 0.048 + 0.019 + \dots, \quad (4-32)$$

从左至右分别是领头阶 (Leading Order, LO)，次领头阶 (Next to leading Order, NLO)，次次领头阶 (Next Next to leading Order, NNLO) 和次次次领头阶 (Next Next Next to leading Order, NNNLO) 的修正 ($\alpha_s = 0.387$)。极质量方案下 D 介子半轻单举衰变宽度的微扰展开级数为

$$\Gamma_{\text{sl}}^{\text{D}} \sim 1 - 0.768104\alpha_s - 2.37521\alpha_s^2 - 10.7295\alpha_s^3 + \dots,$$

收敛行为较差。因此，1S 质量方案是比较合适的粲夸克质量方案，本文的唯象学分析将讨论 $\overline{\text{MS}}$ 和 1S 质量方案下的全局拟合。

4.2.4 唯象学分析

为从 D 介子半轻单举衰变的实验数据中实现重夸克有效理论非微扰参数的拟合估计。本文采用 $D \rightarrow X_{c,s} e^+ \nu_e$ 过程的衰变宽度，电子能量一阶原点矩与电子能量第二、三、四阶中心矩的实验观测值和相应理论表达式进行全局拟合。在幂次修正精确至量纲六算符的精度下，包含以下的微扰参数：

$$\begin{aligned} &\mu_\pi^2(D^{0,+}), \quad \mu_G^2(D^{0,+}), \quad \rho_D^3(D^{0,+}), \quad \rho_{LS}^3(D^{0,+}), \\ &\mu_\pi^2(D_s^+), \quad \mu_G^2(D_s^+), \quad \rho_D^3(D_s^+), \quad \rho_{LS}^3(D_s^+), \end{aligned} \quad (4-33)$$

其中，由于同位旋对称性的约束，对 D^0 和 D^+ 的非微扰参数不作区分。这些非微扰参数在粲介子寿命的理论计算，粲介子稀有衰变，甚至底介子的单举衰变中扮演了举重若轻的角色。量纲六算符也包含四夸克算符，基于真空插入近似 [75] (Vacuum Insertion Approximation, VIA)，四夸克算符非微扰矩阵元矩阵元对衰变宽度的贡献可以忽略不计。

为了讨论幂次展开的收敛性对拟合抽取重夸克有效理论中非微扰参数的影响，我们将在两种情形下进行全局拟合。对于情形 I，物理可观测量的理论表达式的幂次修正仅精确至量纲五算符的贡献；对于情形 II，物理可观测量的理论表达式的幂次修正仅精确至量纲六算符的贡献。此外基于上节的讨论，本节将讨论三种不同的质量方案下非微扰参数的拟合估计。

由于重整化能标 μ 的跑动会引起强相互作用耦合常数的浮动，因此讨论理论输入参数的误差对拟合估计非微扰参数的影响是必要的，经过对所有理论输入参数的误差评估，最终仅引入由于重整化能标的跑动导致强相互作用耦合常数的浮动误差。具体地，首先固定相关的理论输入参数并进行相关的全局拟合估计，对应非微扰参数的估计值作为非微扰参数的拟合估计中心值，对应非微扰参数的估计误差作为非微扰参数误差的实验部分；其次，使用 MC 技术完成 2000 次的相关拟合，取相关拟合关于非微扰参数的估计值分布的标准误差作为非微扰参数误差的理论部分。本文粗略地假设非微扰参数误差的理论部分和实验部分相互独立，基于误差传递公式得到非微扰参数的拟合估计误差。

在拟合过程中，本文使用了奇异夸克质量的 $2+1+1$ 格点 QCD FLAG 平均值， $\bar{m}_s(2\text{GeV}) = 93.44 \text{ MeV}$ [76]。对于粲夸克质量，本文使用 $m_c^{\overline{\text{MS}}} = 1.27 \text{ GeV}$ 和 $m_{c,1S} = 1.55 \text{ GeV}$ [77]。对于强耦合常数，本文采用 Lenz 等人在 [3] 中通过 RunDec 包 [78] 获得的强相互作用耦合常数 $\alpha_s(\bar{m}_c) = 0.387$ 。对于 $\alpha_s(\mu)$ 和 $\bar{m}_c(\mu)$ ，本文考虑了从 1 GeV 到 $2\bar{m}_c(\bar{m}_c)$ 的跑动 μ 。此外使用以下输入值用于理论公式中的其他参数 [77]， $G_F = 1.1663788 \times 10^{-5}$ ， $|V_{cs}| = 0.975$ ，以及 $|V_{cd}| = 0.221$ 。

一. 固定理论输入参数

基于本文第三章理论部分的研究, 可得到了三种 D 介子在极质量方案下的衰变宽度, 电子能量一阶原点矩与电子能量第二、三、四阶中心矩的理论表达式。此外本文提供了 \overline{MS} 和 $1S$ 质量方案下物理可观测量微扰修正部分的理论表达式 (附录A)

定义物理可观测量的理论表达式¹是集合 \mathbf{S} ,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{theory}^{D^0} &:= \{\Gamma^{D^{0,+}}, \langle E_e \rangle^{D^{0,+}}, \langle E_e^2 \rangle_{center}^{D^{0,+}}, \langle E_e^3 \rangle_{center}^{D^{0,+}}, \langle E_e^4 \rangle_{center}^{D^{0,+}}\}, \\ \mathbf{S}_{theory}^{D^+} &:= \{\Gamma^{D^{0,+}}, \langle E_e \rangle^{D^{0,+}}, \langle E_e^2 \rangle_{center}^{D^{0,+}}, \langle E_e^3 \rangle_{center}^{D^{0,+}}, \langle E_e^4 \rangle_{center}^{D^{0,+}}\}, \\ \mathbf{S}_{theory}^{D_s} &:= \{\Gamma^{D_s}, \langle E_e \rangle^{D_s}, \langle E_e^2 \rangle_{center}^{D_s}, \langle E_e^3 \rangle_{center}^{D_s}, \langle E_e^4 \rangle_{center}^{D_s}\}.\end{aligned}\quad (4-34)$$

重标度后对应的物理可观测量的实验观测值为:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{exp, rescaled}^{D^0} &:= \{102.137, 461.653, 28.7391, -1.10121, 19.1876\}, \\ \mathbf{S}_{exp, rescaled}^{D^+} &:= \{102.192, 455.073, 29.0727, -2.36531, 19.7269\}, \\ \mathbf{S}_{exp, rescaled}^{D_s} &:= \{82.9754, 439.393, 29.6515, 3.43014, 21.3503\}, \\ \sigma(\mathbf{S}_{exp, rescaled}^{D^0}) &:= \{2.40402, 4.92835, 1.21868, 3.36424, 1.33466\}, \\ \sigma(\mathbf{S}_{exp, rescaled}^{D^+}) &:= \{2.03942, 4.23467, 1.1135, 3.1932, 1.22891\}, \\ \sigma(\mathbf{S}_{exp, rescaled}^{D_s}) &:= \{1.98213, 5.18726, 1.29376, 3.90018, 1.6387\},\end{aligned}\quad (4-35)$$

前三行是这组物理可观测量 \mathbf{S} 的中心值, 后三行是这组物理可观测量 \mathbf{S} 的标准误差。

一般地, 在 n 个观测点通过测量得到一组 n 个观测值 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 相应的观测值真值 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ 为未知, 它由某个理论模型预期: $\eta_i = f(x_i, \boldsymbol{\theta})$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 其中 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)^T$ 是待定的参数. $\boldsymbol{\theta}$ 的最小二乘估计可由最小二乘函数 $Q^2(\boldsymbol{\theta})$ 的极小值求得

$$Q^2(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - \eta_i) V_{ij}^{-1} (y_j - \eta_j), \quad (4-36)$$

其中, $\boldsymbol{\theta}$ 是某个理论所包含的参数, \mathbf{V} 是测量值之间的协方差矩阵, 若这组观测值之间相互独立, 则 $Q^2(\boldsymbol{\theta})$ 约化为:

$$Q^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \eta_i}{\sigma_i} \right)^2,$$

¹在实际全局拟合过程中, 需要对 \mathbf{S} 的每个元素乘以式(4-24)相对应的标度因子

其中, σ_i 是第 i 个测量值的标准误差。定义最小二乘函数构造如下¹,

$$Q^2(\theta) = \sum_{l=u,d,s} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \times (\mathbf{N}_{\text{exp, rescaled}, i}^{D^l} - \mathbf{N}_{\text{theory, rescaled}, i}^{D^l}) V_{ij,l}^{-1} (\mathbf{N}_{\text{exp, rescaled}, j}^{D^l} - \mathbf{N}_{\text{theory, rescaled}, j}^{D^l})^T, \quad (4-37)$$

其中 $V_{ij,l}$ 是 D^l 介子五组数据之间的协方差矩阵。基于 Mathematica 进行非微扰参数的全局拟合估计, 采用 DifferentialEvolution, SimulatedAnnealing, Random-Searchd 等算法对搜索到的全局最小点进行交叉检验。此外本文基于 Python 完成了固定理论输入参数的前提下两种情形的全局拟合估计作为进一步交叉检验。

极质量方案 我们选取两圈图水平上的极质量, 即 $m_c = 1.67\text{GeV}$. 拟合结果表明, 对于情形 I, $\chi_{\min}^2 = 195.522$, $\chi_{\min}^2/\text{d.o.f} = 17.77$

$$\mu_{\pi}^2(D^{0,+}) \rightarrow 0.05, \mu_G^2(D^{0,+}) \rightarrow -0.02, \mu_{\pi}^2(D_s^+) \rightarrow 0.06, \mu_G^2(D_s^+) \rightarrow 0.08 \quad (4-38)$$

对于情形 II, $\chi_{\min}^2 = 26.24$, $\chi_{\min}^2/\text{d.o.f} = 3.74$

$$\begin{aligned} \mu_{\pi}^2(D^{0,+}) &\rightarrow 0.11, \mu_G^2(D^{0,+}) \rightarrow -0.03, \mu_{\pi}^2(D_s^+) \rightarrow 0.15, \mu_G^2(D_s^+) \rightarrow 0.08 \\ \rho_D^3(D^{0,+}) &\rightarrow -0.005, \rho_{LS}^3(D^{0,+}) \rightarrow 0.006, \rho_D^3(D_s^+) \rightarrow -0.007, \rho_{LS}^3(D_s^+) \rightarrow 0.007 \end{aligned} \quad (4-39)$$

极质量方案下 D 介子半轻单举衰变宽度的高阶微扰修正和幂次修正的收敛性较差, 下面仅讨论 $\overline{\text{MS}}$ 质量方案和 $1S$ 质量方案下的拟合估计结果和相应误差分析。

$\overline{\text{MS}}$ 质量方案 上一节我们讨论了两圈图水平上 $\overline{\text{MS}}$ 质量和极质量之间的转换关系 (式(4-30))。将 $\mathbf{N}_{\text{theory}}$ 中的物理可观测量在两圈图水平上用 $\overline{\text{MS}}$ 质量表示出来 (其微扰部分的具体形式见附录A), 重整化能标取在粲夸克 $\overline{\text{MS}}$ 质量处, 即 $\mu = 1.27\text{GeV}$, 全局拟合估计结果如表4-7所示 表4-7中的第一个误差来源于实验,

$\overline{\text{MS}}$ 方案	χ_{tot}^2	D_i	μ_{π}^2/GeV^2	μ_G^2/GeV^2	ρ_D^3/GeV^3	ρ_{LS}^3/GeV^3
情形 I	49.26	$D^{0,+}$	$0.09 \pm 0.01 \pm .$	$0.27 \pm 0.01 \pm 0.14$	-	-
		D_s^+	$0.09 \pm 0.01 \pm 0.01$	$0.39 \pm 0.01 \pm 0.12$	-	-
情形 II	14.53	$D^{0,+}$	$0.11 \pm 0.01 \pm 0.02$	$0.26 \pm 0.01 \pm 0.14$	$-0.002 \pm 0.001 \pm 0.001$	$0.003 \pm 0.001 \pm 0.001$
		D_s^+	$0.12 \pm 0.01 \pm 0.02$	$0.38 \pm 0.01 \pm 0.13$	$-0.003 \pm 0.001 \pm 0.001$	$0.005 \pm 0.001 \pm 0.001$

表 4-7 $\overline{\text{MS}}$ 质量方案下对非微扰参数的全局拟合估计结果

第二个误差来源于强相互作用耦合常数跑动带来的理论误差。情形 I 和 II 关于非微扰参数的拟合估计值非常接近, 这反映了幂次修正的收敛行为较好。

¹ $l=u,d,s$ 分别对应于 D^0, D^+, D_s^+

1S 质量方案 两圈图水平上 1S 质量和极质量之间的转换关系及其对重整化能标的具体依赖形式 (式(4-31)), 将 $\mathbf{S}_{\text{theory}}$ 中的物理可观测量在两圈图水平上用 1S 质量表示出来 (其微扰部分的具体形式见附录A), 重整化能标取在粲夸克 $\overline{\text{MS}}$ 质量处, 即 $\mu = 1.27\text{GeV}$, 全局拟合结果如表4-8所示, 表4-8中的第一个误差来源

1S 质量方案	χ^2_{tot}	D_i	μ_π^2/GeV^2	μ_G^2/GeV^2	ρ_D^3/GeV^3	$\rho_{\text{LS}}^3/\text{GeV}^3$
情形 I	54.06	$D^{0,+}$	$0.04 \pm 0.003 \pm 0.010$	$0.33 \pm 0.01 \pm 0.01$	-	-
		D_s^+	$0.06 \pm 0.01 \pm 0.01$	$0.44 \pm 0.01 \pm 0.02$	-	-
情形 II	2.32	$D^{0,+}$	$0.09 \pm 0.01 \pm 0.01$	$0.32 \pm 0.01 \pm 0.01$	$-0.003 \pm 0.001 \pm 0.001$	$0.004 \pm 0.001 \pm 0.001$
		D_s^+	$0.11 \pm 0.01 \pm 0.01$	$0.43 \pm 0.01 \pm 0.02$	$-0.004 \pm 0.001 \pm 0.001$	$0.005 \pm 0.001 \pm 0.001$

表 4-8 1S 质量方案下对非微扰参数的全局拟合结果

于实验, 第二个误差来源于强相互作用作用耦合常数跑动引入的误差。1S 质量方案情形 II 的平均最小卡方值小于一, 即在这种情形下具有良好的拟合效果; 此外 1S 质量方案下幂次修正对非微扰参数的估计值影响同样较弱。

此外本文计算了 1S 质量方案下情形 II 中非微扰参数拟合估计的关联矩阵 (式(4-40)),

$$\text{Cor}(D^{0,+}) = \begin{pmatrix} 1. & -0.247711 & -0.920525 & 0.85145 \\ -0.247711 & 1. & 0.325483 & -0.325445 \\ -0.920525 & 0.325483 & 1. & -0.971566 \\ 0.85145 & -0.325445 & -0.971566 & 1. \end{pmatrix}, \quad (4-40)$$

$$\text{Cor}(D_s^+) = \begin{pmatrix} 1. & -0.256407 & -0.901138 & 0.842813 \\ -0.256407 & 1. & 0.324073 & -0.32296 \\ -0.901138 & 0.324073 & 1. & -0.97023 \\ 0.842813 & -0.32296 & -0.97023 & 1. \end{pmatrix},$$

式(4-40)自上 (左) 而 (右), 分别是 μ_π^2 , μ_G^2 , ρ_D^3 , 和 ρ_{LS}^3 。情形 II 相比于情形 I 而言, 由于引入了量纲六算符的微扰参数使得最小卡方值迅速降低, 表明量纲六算符的非微扰矩阵元的贡献在物理可观测量计算中具有举足轻重的作用, 且此现象的存在与否并不依赖于粲夸克质量方案。这一事实确信了量纲六算符修正对物理可观测量的理论预言非常重要。由于物理可观测量有限, 暂时无法实现对量纲六算符中四夸克算符的非微扰矩阵元的拟合估计。期待未来构建足够多的物理可观测量得以进行更丰富的全局拟合估计, 从而确定高量纲算符的非微扰矩阵元。这样的工作无论是对于重夸克有效理论在粲强子弱衰变的典型能标处的发展还是对于粲强子的寿命疑难的理解甚至解决均有重要的意义。

二. 引入理论输入参数的误差

上一节在固定所有理论输入参数的前提下进行全局拟合估计。事实上，理论输入参数的误差对非微扰参数的拟合估计具有不可忽视的影响。在评估所有理论输入参数的误差相对大小之后，本文舍弃次要矛盾抓住主要矛盾，仅考虑由于重整化能标的跑动引起强相互作用耦合常数跑动。本节主要讨论重整化能标 μ 和强相互作用耦合常数 $\alpha_s(\mu)$ 所带来的理论误差¹。

强相互作用耦合常数满足重整化群方程 (式(4-41))，

$$\mu_R^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu_R^2} = \beta(\alpha_s) = -\left(\beta_0\alpha_s^2 + \beta_1\alpha_s^3 + \beta_2\alpha_s^4 + \beta_3\alpha_s^5 \cdots\right). \quad (4-41)$$

式(4-41)中， $\beta_0 = (11C_A - 4n_f T_R)/(12\pi) = (33 - 2n_f)/12\pi$ 被称为单圈 β 函数系数，两圈系数为 $\beta_1 = (17C_A^2 - n_f T_R(10C_A + 6C_F))/24\pi^2 = (153 - 19n_f)/24\pi^2$ ，三圈系数为 $\beta_2 = (2857 - 5033/9n_f + 325/27n_f^2)/128\pi^3$ ， $C_A = 3$ 和 $C_F = 4/3$ ， n_f 是具体过程涉及夸克味道数。

对于仅考虑 n_f 种夸克的相互作用且其重整化能标 μ_R 处的有效理论对应的强相互作用耦合常数对夸克数 n_f 存在依赖。一般地，对于涉及 n_f 和 $n_f + 1$ 种味道的强相互作用耦合常数之间存在一种迭代关系，

$$\alpha_s^{(n_f+1)}(\mu_R^2) = \alpha_s^{(n_f)}(\mu_R^2) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^n c_{n\ell} \left[\alpha_s^{(n_f)}(\mu_R^2)\right]^n \ln^\ell \frac{\mu_R^2}{m_h^2}\right). \quad (4-42)$$

其中 m_h 是第 $(n_f + 1)$ 味的夸克质量， $c_{11} = 1/(6\pi)$ ， $c_{10} = 0$ ， $c_{22} = c_{11}^2$ ， $c_{21} = 11/(24\pi^2)$ ， $c_{20} = -11/(72\pi^2)$ ， m_h 是在 m_h 处的 $\overline{\text{MS}}$ 质量。此外，对式(4-41)进行迭代求解，存在一个近似解析解，

$$\alpha_s(\mu_R^2) \simeq \frac{1}{\beta_0 t} \left(1 - \frac{\beta_1 \ell}{\beta_0^2 t} + \frac{\beta_1^2 (\ell^2 - \ell - 1) + \beta_0 \beta_2}{\beta_0^4 t^2} + \frac{\beta_1^3 (-2\ell^3 + 5\ell^2 + 4\ell - 1) - 6\beta_0 \beta_2 \beta_1 \ell + \beta_0^2 \beta_3}{2\beta_0^6 t^3} + \cdots\right) \quad (4-43)$$

存在两种方式可得粲介子半轻单举衰变典型能标处的强相互作用耦合常数的解析形式：

- 使用 $\mu = m_z$ 处的 α_s ，利用式(4-42)进行迭代求解，最终迭代至目标能标处。
- 若衰变的典型能标出的 α_s 已知，可以使用式(4-43)在典型能标处求解出 Λ_{n_f} ，重新带入式(4-43)得到典型衰变能标附近 α_s 关于重整化能标 μ 的具体依赖形式。

Alexander Lenz 等人于 2022 年重新计算了 D 介子的寿命 [3]，他们给出并采用五圈图水平上 $\alpha_s(\mu = 1.27\text{GeV})$ 的数值结果， $\alpha_s(\mu = 1.27\text{GeV}) = 0.387$ 。本文以该值

¹其余部分的误差与其相比基本忽略不计

为基准, 按照方式二 ($n_f = 4$) 计算可得重整化能标 $\mu = 1.27\text{GeV}$ 处 α_s 关于 μ 的具体依赖形式。

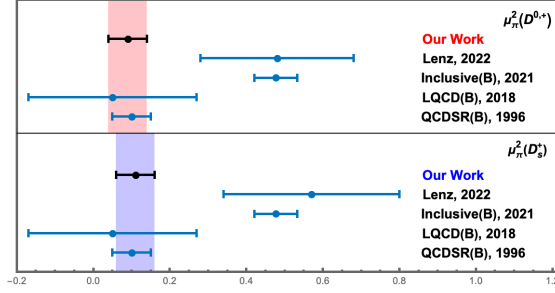
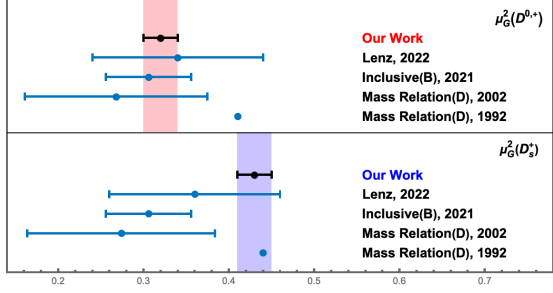
具体而言, 本文引入由重整化能标 μ 的跑动带来 α_s 的误差, 其中重整化能标 μ 被假设服从 $[1, 2.54]\text{GeV}$ 的 Uniform Distribution。利用 MC 模拟, 本文给出了 2000 个重整化能标 μ 的样本, 结合强相互作用对重整化能标的具体依赖形式可得一组强相互作用耦合常数, 并完成 2000 次 χ^2 拟合。

拟合结果如表4-7和4-8所示。在讨论理论输入参数误差对非微扰参数的拟合估计影响基础上, 本文进一步讨论了幂次修正对非微扰参数拟合估计的影响。

由于 1S 质量方案下衰变宽度的微扰修正和幂次修正收敛性较好, 因此本文采取 1S 质量方案下的拟合结果作为本文关于非微扰参数的推荐值, 如式(4-44)所示。

$$\begin{aligned}\mu_\pi^2(D^{0,+}) &= (0.09 \pm 0.05)\text{GeV}^2, & \mu_\pi^2(D_s^+) &= (0.11 \pm 0.05)\text{GeV}^2, \\ \mu_G^2(D^{0,+}) &= (0.32 \pm 0.02)\text{GeV}^2, & \mu_G^2(D_s^+) &= (0.43 \pm 0.02)\text{GeV}^2, \\ \rho_{D^3}(D^{0,+}) &= (-0.003 \pm 0.002)\text{GeV}^3, & \rho_{D^3}(D_s^+) &= (-0.004 \pm 0.002)\text{GeV}^3, \\ \rho_{LS}^3(D^{0,+}) &= (0.004 \pm 0.002)\text{GeV}^3, & \rho_{LS}^3(D_s^+) &= (0.005 \pm 0.002)\text{GeV}^3,\end{aligned}$$

本文结果与已有文献结果之间进行比较如图4-7, 4-8所示。“Lenz, 2022”是 Lenz 等人 2022 年计算 D 介子寿命时采用的非微扰参数数值”, 结果表明本文抽取的非微扰参数具有较高的精度, 这将有助于降低 D 介子理论计算结果的整体不确定度。Inclusive(B), 2021” [71] 的结果是通过 B 介子半轻单举衰变的物理可观测量进行全局拟合得到的, 涉及的 B 介子非微扰参数与 D 介子的非微扰参数通过重夸克对称性相联系。“LQCD(B), 2018” [79] 和“QCDSR(B), 1996” [80] 对 μ_π^2 的结果也是针对 B 介子, 分别通过使用格点量子色动力学和量子色动力学求和规则计算得到的。“Mass Relation(D), 2002” [51] 和 “Mass Relation(D), 1992” [52] 关于 μ_G^2 的结果则是通过使用 D_s^+ 和 D_s^* 介子之间的两种质量关系版本得到的。结果表明本文关于 μ_π^2 的在粲介子中抽取结果和在底介子中抽取的结果存在较大的偏离 (图4-7) 这反映了重夸克对称性在次领先幂次水平上的破坏。值得注意的是, 从抽取非微扰参数的精度来看, 从粲介子中抽取出来 μ_π^2 的精度和从底介子中抽取出来的精度基本一致; 对于 μ_G^2 , 从粲介子中抽取出来的非微扰矩阵元的精度甚至高于从底介子中抽取出来的数值, 反映了目前的实验测量达到一定的精度且 1S 质量方案下微扰修正和幂次修正收敛性良好的事实。

图 4-7 非微扰参数 μ_π^2 的全局拟合估计图 4-8 非微扰参数 μ_G^2 的全局拟合估计

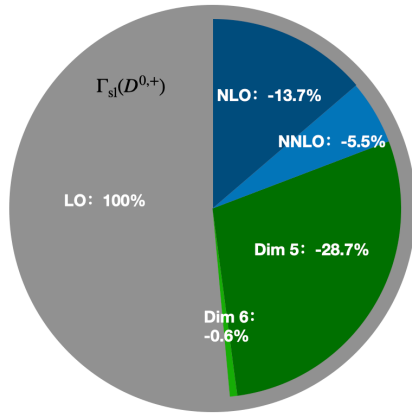
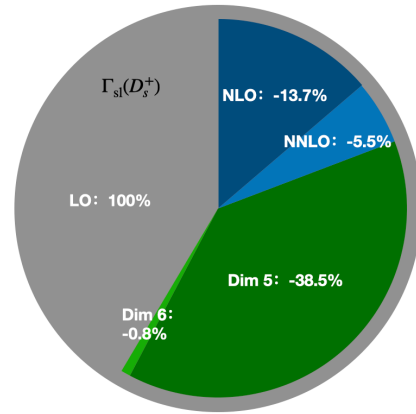
三. 唯象学分析的结果讨论

上节讨论了非微扰参数的全局拟合估计并将其与底介子相关的非微扰矩阵元进行对比。本文在重夸克质量方案的讨论中里给出了 1S 质量方案下衰变宽度的微扰修正级数，结果表明微扰修正具有良好的收敛行为。进一步，讨论目前拟合结果下的幂次修正展开级数的收敛行为是必要的。

本文将树图水平上量纲三算符对衰变宽度的贡献归一化为一，并逐项讨论各部分修正对衰变宽度的贡献，具体地，

$$\begin{aligned}\Gamma_{sl}^{D^{0,+}} &\sim 1 - 0.137 - 0.055 - 0.287 - 0.006 \dots, \\ \Gamma_{sl}^{D_s^+} &\sim 1 - 0.137 - 0.055 - 0.385 - 0.008 \dots,\end{aligned}\tag{4-44}$$

式(4-44)中，从左至右分别是领头阶、次领头阶和次次领头阶的微扰修正和量纲五算符算符矩阵元，量纲六算符矩阵元的幂次修正贡献。无论是幂次修正还是微扰修正，使用本文关于非微扰参数的推荐值，均表现出来良好的收敛性。为了更清楚的展示，对应的贡献如图4-9和4-10所示。

图 4-9 $D^{0,+}$ 介子半轻单举衰宽度图 4-10 D_s^+ 介子半轻单举衰宽度

基于上述讨论，本文推荐在 1S 质量方案下计算 D 介子衰变宽度。Alexander Lenz 等人计算在 D 介子寿命 [3]，他们于重整化能标 $\mu = 0.5\text{GeV}$ 处基于动力学质量方案下给出了三种 D 介子的衰变宽度对重夸克有效理论中非微扰参数的具

体依赖形式。

对于 D^0 介子,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(D^0) = & \Gamma_0 \left[\underbrace{6.15}_{c_3^{\text{LO}}} + \underbrace{2.95}_{\Delta c_3^{\text{NLO}}} - 1.66 \frac{\mu_\pi^2(D)}{\text{GeV}^2} + 0.13 \frac{\mu_G^2(D)}{\text{GeV}^2} + 23.6 \frac{\rho_D^3(D)}{\text{GeV}^3} \right. \\
 & - 1.60 \tilde{B}_1^q + 1.53 \tilde{B}_2^q - 21.0 \tilde{\epsilon}_1^q + 19.2 \tilde{\epsilon}_2^q + \underbrace{0.00}_{\text{dim-7, VIA}} \\
 & \left. - 10.7 \tilde{\delta}_1^{qq} + 1.53 \tilde{\delta}_2^{qq} + 54.6 \tilde{\delta}_3^{qq} + 0.13 \tilde{\delta}_4^{qq} - 29.2 \tilde{\delta}_1^{sq} + 28.8 \tilde{\delta}_2^{sq} + 0.56 \tilde{\delta}_3^{sq} + 2.36 \tilde{\delta}_4^{sq} \right] \\
 = & 6.15 \Gamma_0 \left[1 + 0.48 - 0.13 \frac{\mu_\pi^2(D)}{0.48 \text{GeV}^2} + 0.01 \frac{\mu_G^2(D)}{0.34 \text{GeV}^2} + 0.31 \frac{\rho_D^3(D)}{0.082 \text{GeV}^3} \right. \\
 & - \underbrace{0.01}_{\text{dim-6, VIA}} - 0.005 \frac{\delta \tilde{B}_1^q}{0.02} + 0.005 \frac{\delta \tilde{B}_2^q}{0.02} + 0.137 \frac{\tilde{\epsilon}_1^q}{-0.04} - 0.125 \frac{\tilde{\epsilon}_2^q}{-0.04} + \underbrace{0.00}_{\text{dim-7, VIA}} \\
 & \left. - 0.0045 r_1^{qq} - 0.0004 r_2^{qq} - 0.0035 r_3^{qq} + 0.0000 r_4^{qq} \right. \\
 & \left. - 0.0109 r_1^{sq} - 0.0079 r_2^{sq} - 0.0000 r_3^{sq} + 0.0001 r_4^{sq} \right].
 \end{aligned} \tag{4-45}$$

为讨论各个部分的贡献, Lenz 等人将其归一化至他们采用的中心值上。此外, 他们引入 $\tilde{B}_i^q = 1 + \delta \tilde{B}_i^q$ 以表示与真空插入近似的偏差, 并且保守地将 $\delta \tilde{B}_i^q$ 归一化为 0.02。色八重算符的矩阵元素被归一化为 -0.04, 除此之外, 还引入了比值 $r_i^{qq'} \equiv \bar{\delta}_i^{qq'} / \langle \bar{\delta}_i^{qq'} \rangle$ 表征高量纲算符的误差贡献。

对于 D^+ 介子,

$$\begin{aligned}
 \Gamma(D^+) = & \Gamma_0 \left[\underbrace{6.15}_{c_3^{\text{LO}}} + \underbrace{2.95}_{\Delta c_3^{\text{NLO}}} - 1.66 \frac{\mu_\pi^2(D)}{\text{GeV}^2} + 0.13 \frac{\mu_G^2(D)}{\text{GeV}^2} + 23.6 \frac{\rho_D^3(D)}{\text{GeV}^3} \right. \\
 & - 16.9 \tilde{B}_1^q + 0.56 \tilde{B}_2^q + 84.0 \tilde{\epsilon}_1^q - 1.34 \tilde{\epsilon}_2^q + \underbrace{6.76}_{\text{dim-7}} \\
 & \left. - 0.06 \tilde{\delta}_1^{qq} + 0.06 \tilde{\delta}_2^{qq} - 16.8 \tilde{\delta}_3^{qq} + 16.9 \tilde{\delta}_4^{qq} - 29.3 \tilde{\delta}_1^{sq} + 28.8 \tilde{\delta}_2^{sq} + 0.56 \tilde{\delta}_3^{sq} + 2.36 \tilde{\delta}_4^{sq} \right] \\
 = & 6.15 \Gamma_0 \left[1 + 0.48 - 0.13 \frac{\mu_\pi^2(D)}{0.48 \text{GeV}^2} + 0.01 \frac{\mu_G^2(D)}{0.34 \text{GeV}^2} + 0.31 \frac{\rho_D^3(D)}{0.082 \text{GeV}^3} \right. \\
 & - \underbrace{2.66}_{\text{dim-6, VIA}} - 0.055 \frac{\delta \tilde{B}_1^q}{0.02} + 0.002 \frac{\delta \tilde{B}_2^q}{0.02} - 0.546 \frac{\tilde{\epsilon}_1^q}{-0.04} + 0.009 \frac{\tilde{\epsilon}_2^q}{-0.04} + \underbrace{1.10}_{\text{dim-7, VIA}} \\
 & \left. - 0.0000 r_1^{qq} - 0.0000 r_2^{qq} + 0.0011 r_3^{qq} + 0.0008 r_4^{qq} \right. \\
 & \left. - 0.0109 r_1^{sq} - 0.0080 r_2^{sq} - 0.0000 r_3^{sq} + 0.0001 r_4^{sq} \right].
 \end{aligned} \tag{4-46}$$

其中, 由于泡利干涉项的存在, 衰变宽度中出现了巨大的负修正; , 基于 VIA,

HQET, $\mu_0 = 1.5\text{GeV}$	\tilde{B}_1	\tilde{B}_2	$\tilde{\epsilon}_1$	$\tilde{\epsilon}_2$
$D^{*,0}$	$1.0026^{+0.0198}_{-0.0106}$	$0.9982^{+0.0052}_{-0.0066}$	$-0.0165^{+0.0209}_{-0.0346}$	$-0.0004^{+0.0200}_{-0.0326}$
D_s^+	$1.0022^{+0.0185}_{-0.0099}$	$0.9983^{+0.0052}_{-0.0067}$	$-0.0104^{+0.0202}_{-0.0330}$	$0.0001^{+0.0199}_{-0.0324}$

表 4-9 通过 HQETSR 计算得到的 Bag 参数数值结果 1

HQET, $\mu_0 = 1.5\text{GeV}$	$\tilde{\delta}_1$	$\tilde{\delta}_2$	$\tilde{\delta}_3$	$\tilde{\delta}_4$
$\langle D_q \tilde{O}^q D_q \rangle$	$0.0026^{+0.0142}_{-0.0092}$	$-0.0018^{+0.0047}_{-0.0072}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0024}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$
$\langle D_s \tilde{O}^q D_s \rangle$	$0.0025^{+0.0144}_{-0.0093}$	$-0.0018^{+0.0047}_{-0.0072}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0024}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$
$\langle D_q \tilde{O}^s D_q \rangle$	$0.0023^{+0.0140}_{-0.0091}$	$-0.0017^{+0.0046}_{-0.0070}$	$-0.0004^{+0.0015}_{-0.0023}$	$0.0003^{+0.0012}_{-0.0008}$

表 4-10 通过 HQETSR 计算得到的 Bag 参数数值结果 2

微扰修正与量纲六、七算符的贡献几乎相互抵消，这表明衰变宽度的展开级数对 $\Gamma(D^+)$ 对高幂次算符及其 QCD 修正高度敏感，比如量纲五算符的 QCD 修正。

$$\begin{aligned}
\Gamma(D_s^+) = & \Gamma_0 \left[\underbrace{6.15}_{c_3^{\text{LO}}} + \underbrace{2.95}_{\Delta c_3^{\text{NLO}}} - 1.66 \frac{\mu_\pi^2(D_s)}{\text{GeV}^2} + 0.13 \frac{\mu_G^2(D_s)}{\text{GeV}^2} + 23.6 \frac{\rho_D^3(D_s)}{\text{GeV}^3} \right. \\
& - 49.6 \tilde{B}_1^s + 48.4 \tilde{B}_2^s - 13.7 \tilde{\epsilon}_1^s + 18.8 \tilde{\epsilon}_2^s + \underbrace{0.63}_{\text{dim-7}} \\
& \left. - 15.8 \tilde{\delta}_1^{qs} + 2.34 \tilde{\delta}_2^{qs} + 55.4 \tilde{\delta}_3^{qs} + 25.0 \tilde{\delta}_4^{qs} \right] \\
= & 6.15 \Gamma_0 \left[1 + 0.48 - 0.15 \frac{\mu_\pi^2(D_s)}{0.57 \text{GeV}^2} + 0.01 \frac{\mu_G^2(D_s)}{0.36 \text{GeV}^2} + 0.46 \frac{\rho_D^3(D_s)}{0.119 \text{GeV}^3} \right. \\
& - \underbrace{0.20}_{\text{dim-6, VIA}} - 0.161 \frac{\delta \tilde{B}_1^s}{0.02} + 0.157 \frac{\tilde{B}_2^s}{0.02} + 0.089 \frac{\tilde{\epsilon}_1^s}{-0.04} + 0.122 \frac{\tilde{\epsilon}_2^s}{0.04} + \underbrace{0.10}_{\text{dim-7, VIA}} \\
& \left. - 0.0064 r_1^{qs} - 0.0007 r_2^{qs} - 0.0036 r_3^{qs} + 0.0012 r_4^{qs} \right].
\end{aligned} \tag{4-47}$$

同样的，对于 D_s^+ 介子衰变宽度也存在一组收敛性较好的微扰修正展开级数。尽管式(4-45)，式(4-46)和式(4-47)是基于动力学质量方案下给出的结果，但量纲五算符和量纲六算符的非微扰矩阵元同样起到举足轻重的作用，因此有必要将本文关于非微扰参数的抽取结果带入相关的表达式，粗略定性地展示其对寿命计算的影响。

事实上，高量纲算符矩阵元的参数化存在模型（近似）依赖，本文将展示在重夸克有效理论求和规则（Heavy Quark Effective Theory SumRule, HQETSR）和真空插入近似两种参数化下有关 D 介子寿命的理论计算，

Bag 参数在 HQETSR 下的具体数值 [64] [60] 如表4-9和4-10所示，由于本文未讨论上述非微扰参数估计值之间的关联，因此这里仅讨论 D 介子衰变宽度理论预言的中心值。本文分析了两种情况，第一种情况对应于 D 介子衰变宽度的

量纲五算符非微扰参数采用本文推荐值，其中非微扰参数使用 **Lenz** 等人的推荐值和 **HQETSR** 的结果；第二种情况对应于量纲五算符非微扰矩阵元以及量纲六算符的两夸克算符非微扰矩阵元采用本文推荐值，其余非微扰参数采用 **Lenz** 等人的推荐值和 **HQETSR** 的数值结果。结果如图4-11所示。

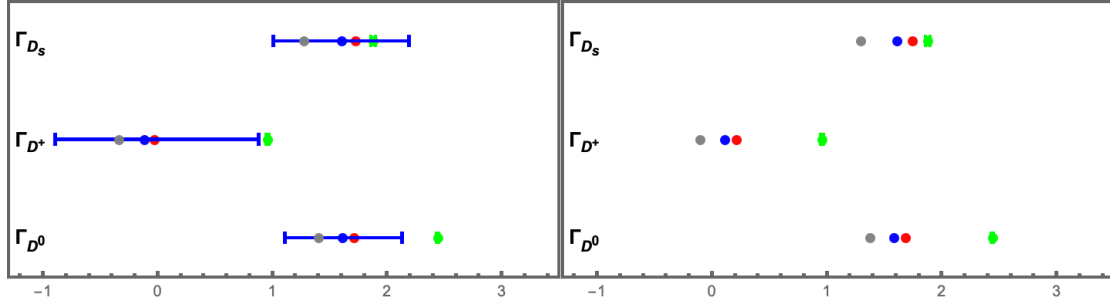


图 4-11 动力学质量方案下基于 **HQETSR** 对粲介子衰变宽度的理论预言

图4-11中，绿色误差棒表示 **BESIII** 合作组和 **CLEO** 合作组关于 **D** 介子的实验测量值，蓝色误差棒表示 **Alex Lenz** 等关于粲介子衰变宽度的理论计算结果，由于 **D⁺** 介子中泡利干涉项很大的负贡献导致其理论预言的中心值小于零，且理论预言的误差远远大于实验测量值的误差且其中心值和实验观测量之间存在明显的偏离。红点对应于本文分析的第一种情况，灰点对应于本文分析的第二种情况。红点较之蓝色误差棒更靠近实验观测量值，尤其是 **D⁺** 介子，蓝色误差棒的中心值是 $-0.15/\text{ps}^{-1}$ 而红点将这一数值移动至 $-0.03/\text{ps}^{-1}$ 。值得注意的是，对于本文分析的第二种情况，灰点与实验值之间存在更明显的偏离。这表明由于有限的物理可观测量导致无法实现量纲六算符夸克算符非微扰矩阵元的有效拟合估计，另一方面，体现出高幂次修正的重要性。

此外，本文在动力学质量方案下基于 **VIA** 对粲介子寿命进行粗略定性预言，如图4-12所示。其中绿色的误差棒表示 **BESIII** 合作组和 **CLEO** 合作组关于 **D** 介子衰变宽度的测量值，蓝点表示 **Lenz** 等人基于 **VIA** 对粲介子衰变宽度的理论预言，红点对应于本文分析的第一种情况，灰点对应于我们分析的第二种情况。数据点之间的基本特征图4-11保持一致。这说明了本文实现了对量纲五算符非微扰矩阵元的有效拟合估计，且实验数据更偏向于本文关于量纲五算符非微扰参数的推荐值。

不可否认的是，量纲六算符矩阵元的幂次修正贡献同样对粲介子衰变宽度的理论预言起到举足轻重的作用，因此未来关于高幂次算符非微扰矩阵元的 **QCD** 修正及其拟合抽取工作是必要的。

4.3 本章回顾

基于第三章关于 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 过程的理论分析, 本章从两方面介绍了 D 介子半轻单举衰变的唯象学分析, 分别是数据抽取和唯象学分析。

- 一 数据抽取: 本文从 CLEO 合作组 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 的实验室系下电子能谱出发利用 MC 技术抽取出 D^0 和 D^+ 介子的衰变宽度, 电子能量一、二、三、四阶中心矩的实验观测值, D_s 介子的衰变宽度, 电子能量一、二、三、四阶中心矩的抽取来源于 BESIII 合作组的数据。此外, 本文基于关联矩阵和视觉检查实现对该组观测量之间关联程度的讨论, 并引入一组新观测量 (衰变宽度、电子能量一阶矩与二三四阶中心矩), 新观测量将与对应的物理公式一齐参与全局拟合。
- 二 唯象学分析: 由于物理可观测量理论公式对粲夸克质量非常敏感, 因此本文基于三种质量方案实现重夸克有效理论基本参数的全局拟合抽取; 对于幂次修正带来关于非微扰参数拟合估计的误差, 本文在三种质量方案的基础上基于两种情形进行全局拟合估计: 理论表达式截断于量纲五算符非微扰矩阵元贡献与截断于量纲六算符非微扰矩阵元贡献。对于理论输入参数误差对非微扰参数拟合估计误差的贡献, 本文基于 MC 技术仅讨论了由于重整化能标 μ 的跑动引起强相互作用耦合常数 $\alpha_s(\mu)$ 的跑动对于非微扰参数拟合估计的误差贡献。
- 三 结果表明: 1S 质量方案下精确至量纲六算符非微扰矩阵元贡献情形下的平均最小 χ^2 最小, 非微扰参数的拟合估计值没有明显的粲夸克质量方案依赖。

本文推荐 1S 质量方案下精确至量纲六算符非微扰矩阵元贡献情形下的非微扰参数拟合估计值作为唯象学分析的结果, 此外, 本文基于唯象学分析结果讨论了 D 介子半轻单举衰变幂次修正和微扰修正的收敛行为, 发现在 1S 质量方案下, D 介子半轻单举衰变表现出极好的收敛性。因此本文推荐在 1S 质量方案下对 D 介子寿命进行理论计算。

第五章 总结与展望

寻找新物理和理解 QCD 非微扰是目前粒子物理领域内的核心任务。而粲物理，特别是粲味强子弱衰变对于这两个核心任务起到关键作用：一方面，此类过程作为弱衰变，对可能存在的高能标新物理非常敏感，另一方面，过程中初末态强子化由非微扰 QCD 所主导，是探究 QCD 的重要平台。粲味强子弱过程分为遍举衰变和单举衰变，后者理论研究方法比较成熟，可以从第一性原理出发系统的求解幂次修正的形式，因而其理论误差更加可控。相比于 B 介子和底重子，由于粲夸克质量较小，按 QCD 耦合常数展开的微扰修正以及按重夸克质量负幂次展开的幂次修正都更加显著，因此粲味强子弱衰变为研究高阶修正提供了更加理想的环境。因此粲味强子单举衰变的研究具有其独特意义。

与此同时，粒子物理领域内长期存在一些疑难与反常，并引起领域内的广泛关注。对于更清楚的认识甚至解决这些疑难，粲味强子单举衰变的研究可以起到关键性的作用。其中之一是粲强子寿命的理论预言与实验测量不一致，原因在于寿命理论计算依赖非微扰参数，目前理论工作中的非微扰参数均有较大的模型依赖。因此，基于粲味强子举衰变过程的观测量和对应实验数据，实现对非微扰矩阵元模型无关的抽取，是理解甚至解决粲强子寿命疑难的关键所在。

本文在以下三个方面对理解粲强子寿命疑难进行了努力：

首先理论上，基于重夸克有效理论和算符乘积展开，讨论高阶修正对非微扰强子矩阵元的影响。高阶修正主要包括重夸克质量负幂次展开的幂次修正和 QCD 耦合常数展开的微扰修正。关于重夸克质量负幂次展开的幂次修正，介绍了 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程树图水平量纲三和量纲五算符对应结构函数的匹配与相空间解析积分，得到对应的电子能谱解析形式。在此基础上，通过取末态粲夸克质量趋于零的极限，可得 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程树图水平的电子能谱解析形式。关于 QCD 耦合常数展开的微扰修正，在单圈水平上，本文介绍了 $B \rightarrow X_c e \nu$ 过程的结构函数，并通过取末态粲夸克质量趋于 0 的极限，得到 $B \rightarrow X_u e \nu$ 过程的结构函数，在此基础上，对相空间进行解析积分，得到对应的电子能谱解析形式。将上述的电子能谱转换到粲夸克半轻单举衰变过程中，即得到 $D \rightarrow X e^+ \nu$ 过程电子能谱的解析形式。由于重夸克有效理论的局限性，需要对电子能谱进行相空间加权积分进行“平滑”处理后，方可与实验观测量进行对比。本文讨论了 $D \rightarrow X_s e^+ \nu$ 和 $D \rightarrow X_d e^+ \nu$ 两类过程，粲强子半轻单举衰变的末态夸克包括奇异夸克，其质量接近非微扰能标，因此需要作为软自由度进行保留，对于 $D \rightarrow X_s e^+ \nu$ ，末态奇异夸

克的质量效应被考虑在内。基于 $D \rightarrow Xe^+\nu$ 过程的电子能谱，通过对其做相空间加权解析积分，给出关于衰变宽度、电子能量原点矩的理论表达式，它们依赖于非微扰强子矩阵元。

实验上，美国的 CLEO 合作组 2009 年测量了实验室系下三种 D 介子半轻单举衰变过程的电子能谱，我国的 BESIII 合作组于 2018 年更新了 D_s^+ 介子半轻单举衰变过程的电子能谱。本文从粲介子半轻单举衰变的电子能谱出发，利用重夸克有效理论的预言，在红外区域对其做拟合外推；关于系统误差，对衰变分支比的系统误差进行延拓并假设每个 bin 的系统误差全关联，最终得到实验室系下完整的电子能谱。基于此，对其做关于电子能量的加权求和得到电子能量矩和衰变宽度的实验测量值。除此之外，还讨论了电子能量矩之间的关联系数，最终选择衰变宽度，电子能量一阶原点矩，电子能量第二、三和四阶中心矩作为数据点与对应的理论表达式一齐进行全局拟合。

唯象学分析上，由于衰变宽度对粲夸克质量高度敏感，因此本文基于三种粲夸克质量方案，给出对应方案下粲强子半轻单举衰变宽度、电子能量一阶原点矩、电子能量第二、三和四阶中心矩的理论表达式，与对应实验观测值一齐进行全局拟合；关于幂次修正对于非微扰参数拟合抽取带来的误差贡献，本文分为两种情形进行全局拟合，分别是精确至量纲五算符和精确至量纲六算符贡献。关于理论输入参数的误差，本文仅考虑由于重整化能标跑动引起的强相互作用耦合常数的误差，通过 2000 次 MC 撒点进行全局拟合，取其非微扰参数估计值分布的标准误差作为理论输入参数 α_s 的误差对非微扰参数估计值的误差贡献。

唯象学分析结果表明：

- 对于三种粲夸克质量方案全局拟合，引入量纲六算符非微扰矩阵元贡献之后，平均最小卡方值迅速降低，表明量纲六算符非微扰矩阵元在衰变宽度的理论计算中起到关键性的作用。
- 在 1S 质量方案下，平均最小卡方值小于 1，表明该质量方案下的拟合具有良好的效果，且 1S 质量方案和 \overline{MS} 方案下非微扰参数的拟合抽取值保持一致，最终本文推荐 1S 质量方案下非微扰参数的估计值作为推荐。
- 在 1S 质量方案下，基于非微扰参数的拟合估计值，本文计算了 D 介子半轻单举衰变宽度的微扰修正和幂次修正，呈现出极好的收敛性。
- 基于本文关于非微扰参数的拟合估计值，本文对粲强子衰变宽度进行了定性分析，结果表明使用本文关于非微扰参数的估计值，三种 D 介子寿命均更接近实验观测量值。

本文首次对粲强子半轻单举衰变过程中的量纲五算符非微扰强子矩阵元实现模型无关的高精度拟合抽取：该拟合结果可以直接用于粲强子寿命的理论计

算；提出 1S 质量方案是目前计算粲强子寿命的最适合的质量方案：我们在 1S 方案方案下给出粲强子半轻单举衰变宽度精确至三圈图微扰修正的数值结果，展示出极好的收敛性。

本文工作还存在很多地方需要提升，主要包括：

- 理论上：量纲五算符的单圈修正贡献不可忽略，由于逐阶计算的难度和计算量将爆炸式地增长，因此本文并未讨论该修正项对非微扰参数估计值的影响，但未来考虑量纲五算符的单圈修正是必要的。
- 数据方面：一方面，从实验数据中抽取衰变宽度、电子能量矩的工作需要实验粒子物理学家进行更专业的分析；另一方面，实验上测量 D 介子质心系下的电子能谱是必要的，这将有助于对相空间做切割，使得构建更多的数据点成为可能。
- 唯象学分析上，随着未来理论和实验精度的不断提升，更加系统全面的拟合手段的引入是必要的，比如贝叶斯分析。

对于该系列工作，从实验角度来看，BESIII 和即将问世的超级陶粲工厂预计将提供更精确的总衰变率和微分衰变率的测量，这对于更好地确定重夸克有效理论参数至关重要。此外，我们建议实验与以往的研究相比，纳入以下改进：

- 在 D 介子的质心系而不是实验室系中测量电子能谱：这使得理论物理学家可以直接利用结果，而无需使用洛伦兹变换，洛伦兹变换仅对整个相空间中的电子能量矩有效。因此，可以得到具有更高能量截断的电子能量矩，为重夸克有效理论参数确定提供更多的实验可观测量。
- 直接测量电子能量矩：从分 bin 的电子能量谱中获得电子能量矩需要假设每个箱内的特定分布，引入不必要的不确定性。
- 利用单举过程强子系统 X 的信息，并重建轻子对 (q^2) 和强子系统 (M_X) 的不变质量平方。特别是 q^2 矩的结果，将增强具有重参数化不变性的 HQET 算符的非微扰强子矩阵元的确定。通过包括足够多的可观测量，如具有各种截断的 E_e , q^2 和 M_X 矩，就可以确定量纲七算符的非微扰强子矩阵元。
- 对于 $D \rightarrow \mu X$ 的衰变道进行测量，所有可观测量的 μ/e 比值可以显著减少理论不确定性，使它们成为标准模型的精确检验可观测量。
- 区分 $D \rightarrow X_s e^+ \nu$ 中的 $D \rightarrow X_d e^+ \nu$ ，这将使得抽取单举版本的 CKM 矩阵元 V_{cs} 和 V_{cd} 成为可能，并与遍举衰变中抽取出的 CKM 矩阵元进行比较，以检验 CKM 机制。

最后，该工作可以推广至味道改变中性流 $c \rightarrow u ll$ 过程，检验轻子味道普世性的破坏以及角分布反常，这将有助于理解 B 介子衰变中相应的反常现象。

附录 A $\overline{\text{MS}}$ 与 1S 质量方案下可观测量的理论公式

$\overline{\text{MS}}$ 质量方案下 D 介子半轻单举衰变宽度与电子能量矩领先幂次下的微扰部分为,

$$\begin{aligned}\Gamma_{D_i} &= \hat{\Gamma}_0 \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 \overline{m}_c^5(\mu) \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} (5\bar{\ell} + 4.2536) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left(\frac{425}{24} \bar{\ell}^2 + 38.3935\bar{\ell} + 29.8447 \right) \right], \\ \langle E_e \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 \overline{m}_c^6(\mu) \left[\frac{3}{10} + \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{9}{5} \bar{\ell} + 1.64052 \right) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left(\frac{291}{40} \bar{\ell}^2 + 16.2359\bar{\ell} + 12.7981 \right) \right], \\ \langle E_e^2 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 \overline{m}_c^7(\mu) \left[\frac{1}{10} + \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{7}{10} \bar{\ell} + 0.66823 \right) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left(\frac{763}{240} \bar{\ell}^2 + 7.2267\bar{\ell} + 5.70419 \right) \right], \\ \langle E_e^3 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 \overline{m}_c^8(\mu) \left[\frac{1}{28} + \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{2}{7} \bar{\ell} + 0.282051 \right) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left(\frac{121}{84} \bar{\ell}^2 + 3.31624\bar{\ell} + 2.60749 \right) \right], \\ \langle E_e^4 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 \overline{m}_c^9(\mu) \left[\frac{3}{224} + \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{27}{224} \bar{\ell} + 0.122073 \right) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left(\frac{171}{256} \bar{\ell}^2 + 1.5522\bar{\ell} + 1.21291 \right) \right],\end{aligned}$$

其中, $\bar{\ell} \equiv \log(\mu^2/\overline{m}_c^2)$. $\hat{\Gamma}_0 = \frac{G_F^2}{192\pi^3}$,

1S 质量方案下 D 介子半轻单举衰变宽度与电子能量矩领先幂次下的微扰部分为,

$$\begin{aligned}\Gamma_{D_i} &= \hat{\Gamma}_0 \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_{c,1S}^5 \left[1 + \epsilon \left(\frac{10\alpha_s^2}{9} - \frac{2\pi\alpha_s}{3} + \frac{25\alpha_s}{6\pi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \left(2.9473\ell_\alpha \alpha_s^3 - 0.50936\ell_{1S} \alpha_s^2 + 0.74074\alpha_s^4 + 3.1352\alpha_s^3 - 2.3752\alpha_s^2 \right) \right], \\ \langle E_e \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_{c,1S}^6 \left[\frac{3}{10} + \epsilon \left(\frac{2\alpha_s^2}{5} - \frac{\pi\alpha_s}{5} + \frac{1093\alpha_s}{900\pi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \left(-0.16031\ell_{1S} \alpha_s^2 + 1.061\ell_\alpha \alpha_s^3 + 0.31111\alpha_s^4 + 1.1136\alpha_s^3 - 0.78025\alpha_s^2 \right) \right], \\ \langle E_e^2 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_{c,1S}^7 \left[\frac{1}{10} + \epsilon \left(\frac{7\alpha_s^2}{45} - \frac{\pi\alpha_s}{15} + \frac{4243\alpha_s}{10800\pi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \left(-0.055960\ell_{1S} \alpha_s^2 + 0.41262\ell_\alpha \alpha_s^3 + 0.13827\alpha_s^4 + 0.42715\alpha_s^3 - 0.28151\alpha_s^2 \right) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle E_e^3 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_{c,1S}^8 \left[\frac{1}{28} + \epsilon \left(\frac{4\alpha_s^2}{63} - \frac{\pi\alpha_s}{42} + \frac{144037\alpha_s}{1058400\pi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^2 \left(-0.020877\ell_{1S}\alpha_s^2 + 0.16842\ell_\alpha\alpha_s^3 + 0.063492\alpha_s^4 + 0.17196\alpha_s^3 - 0.10778\alpha_s^2 \right) \right], \\
\langle E_e^4 \rangle_{D_i} &= \frac{\hat{\Gamma}_0}{\Gamma_{D_i}} \sum_{q=d,s} |V_{cq}|^2 m_{c,1S}^9 \left[\frac{3}{224} + \epsilon \left(\frac{3\alpha_s^2}{112} - \frac{\pi\alpha_s}{112} + \frac{69827\alpha_s}{1411200\pi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^2 \left(-0.0081565\ell_{1S}\alpha_s^2 + 0.071051\ell_\alpha\alpha_s^3 + 0.029762\alpha_s^4 + 0.071557\alpha_s^3 - 0.042999\alpha_s^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

其中, $\ell_\alpha \equiv -\log(\alpha_s(\mu)m_{c,1S}C_F/\mu)$, $\ell_{1S} \equiv \log(\mu^2/m_{c,1S}^2)$, 变量 $\epsilon = 1$ 用于修正展开 [81]。

参考文献

- [1] Fael M, Mannel T, Vos K K. The Heavy Quark Expansion for Inclusive Semileptonic Charm Decays Revisited[J]. JHEP, 2019, 12:067.
- [2] Aquila V, Gambino P, Ridolfi G, et al. Perturbative corrections to semileptonic b decay distributions[J]. Nucl. Phys. B, 2005, 719:77–102.
- [3] King D, Lenz A, Piscopo M L, et al. Revisiting inclusive decay widths of charmed mesons[J]. JHEP, 2022, 08:241.
- [4] Asner D M, et al. Measurement of absolute branching fractions of inclusive semileptonic decays of charm and charmed-strange mesons[J]. Phys. Rev. D, 2010, 81:052007.
- [5] Ablikim M, et al. Measurement of the absolute branching fraction of inclusive semielectronic D_s^+ decays[J]. Phys. Rev. D, 2021, 104(1):012003.
- [6] Stoney G J. Lii. on the physical units of nature[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1881, 11(69):381–390.
- [7] Rutherford E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom[J]. Philosophical Magazine, 2012, 92(4):379–398.
- [8] Rutherford E. Collision of α particles with light atoms. iv. an anomalous effect in nitrogen[J]. Philosophical Magazine, 2010, 90(S1):31–37.
- [9] Chadwick J. Possible existence of a neutron[J]. Nature, 1932, 129(3252):312–312.
- [10] Anderson C D. Energies of cosmic-ray particles[J]. Physical Review, 1932, 41(4):405.
- [11] Anderson C D, Neddermeyer S H. Cloud chamber observations of cosmic rays at 4300 meters elevation and near sea-level[J]. Physical Review, 1936, 50(4):263.
- [12] Anderson H, Fermi E, Long E, et al. Total cross sections of positive pions in hydrogen[J]. Physical Review, 1952, 85(5):936.
- [13] Cowan Jr C L, Reines F, Harrison F, et al. Detection of the free neutrino: a confirmation[J]. Science, 1956, 124(3212):103–104.
- [14] Danby G, Gaillard J M, Goulianos K, et al. Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos[J]. Physical Review Letters, 1962, 9(1):36.
- [15] Schwinger J. Quantum electrodynamics. i. a covariant formulation[J]. Physical Review, 1948, 74(10):1439.
- [16] Schwinger J. Quantum electrodynamics. ii. vacuum polarization and self-energy[J]. Physical Review, 1949, 75(4):651.
- [17] Schwinger J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron[J]. Physical Review, 1948, 73(4):416.

- [18] Tomonaga S i. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields[J]. Progress of Theoretical Physics, 1946, 1(2):27–42.
- [19] Feynman R P. Space-time approach to quantum electrodynamics[C]. Proceedings of Quantum Electrodynamics. CRC Press, 2018: 178–198.
- [20] Feynman R P. The theory of positrons[C]. Proceedings of Quantum Electrodynamics. CRC Press, 2018: 167–177.
- [21] Feynman R P. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction[J]. Physical Review, 1950, 80(3):440.
- [22] Dyson F J. The radiation theories of tomonaga, schwinger, and feynman[J]. Physical Review, 1949, 75(3):486.
- [23] Dyson F J. The s matrix in quantum electrodynamics[J]. Physical Review, 1949, 75(11):1736.
- [24] Yang C N, Mills R L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance[J]. Physical review, 1954, 96(1):191.
- [25] Glashow S L. Partial-symmetries of weak interactions[J]. Nuclear physics, 1961, 22(4):579–588.
- [26] Salam A, Ward J. Electromagnetic and weak interactions[M]. London, 1964.
- [27] Weinberg S. A model of leptons[J]. Physical review letters, 1967, 19(21):1264.
- [28] Aubert J J, Becker U, Biggs P, et al. Experimental observation of a heavy particle j[J]. Physical Review Letters, 1974, 33(23):1404.
- [29] Abrams G, Briggs D, Chinowsky W, et al. Discovery of a second narrow resonance in e^+e^- annihilation[J]. Physical Review Letters, 1974, 33(24):1453.
- [30] Herb S t, Hom D, Lederman L, et al. Observation of a dimuon resonance at 9.5 GeV in 400 GeV proton-nucleus collisions[J]. Physical Review Letters, 1977, 39(5):252.
- [31] Innes W R, Appel J, Brown B, et al. Observation of structure in the Υ region[J]. Physical Review Letters, 1977, 39(20):1240.
- [32] Abe F, Akimoto H, Akopian A, et al. Observation of top quark production in p p collisions with the collider detector at fermilab[J]. Physical review letters, 1995, 74(14):2626.
- [33] Barber D, Becker U, Benda H, et al. Discovery of three-jet events and a test of quantum chromodynamics at petra[J]. Physical Review Letters, 1979, 43(12):830.
- [34] Arnison G, Astbury A, Aubert B, et al. Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at $s = 540 \text{ GeV}$ [J]. Physics Letters B, 1983, 122(1):103–116.
- [35] Arnison G t, Astbury A, Aubert B, et al. Experimental observation of lepton pairs of invariant mass around $95 \text{ GeV}/c^2$ at the cern sps collider[J]. Physics letters B, 1983, 126(5):398–410.
- [36] Perl M L, Abrams G, Boyarski A, et al. Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation[J]. Physical Review Letters, 1975, 35(22):1489.
- [37] Kodama K t, Ushida N, Andreopoulos C, et al. Observation of tau neutrino interactions[J]. Physics Letters B, 2001, 504(3):218–224.

- [38] Aad G, Abajyan T, Abbott B, et al. Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc[J]. Physics Letters B, 2012, 716(1):1–29.
- [39] Qin Q, Li H n, Lü C D, et al. Branching ratios and direct CP asymmetries in $D \rightarrow PV$ decays[J]. Phys. Rev. D, 2014, 89(5):054006.
- [40] Bigi I I Y, Shifman M A, Uraltsev N G, et al. QCD predictions for lepton spectra in inclusive heavy flavor decays[J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 71:496–499.
- [41] Neubert M. Heavy quark symmetry[J]. Phys. Rept., 1994, 245:259–396.
- [42] Cheng H Y. Charmed baryon physics circa 2021[J]. Chin. J. Phys., 2022, 78:324–362.
- [43] Gratx J, Melic B, Niandvi I. Lifetimes of singly charmed hadrons[J]. JHEP, 2022, 07:058.
- [44] Cheng H Y, Liu C W. Study of singly heavy baryon lifetimes[J]. JHEP, 2023, 07:114.
- [45] Gambino P, et al. Challenges in semileptonic B decays[J]. Eur. Phys. J. C, 2020, 80(10):966.
- [46] Archilli F, Bettler M O, Owen P, et al. Flavour-changing neutral currents making and breaking the standard model[J]. Nature, 2017, 546(7657):221–226.
- [47] Ablikim M, et al. Measurement of the absolute branching fraction of the inclusive semileptonic Λ_c^+ decay[J]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(25):251801.
- [48] Ablikim M, et al. Improved measurement of the absolute branching fraction of inclusive semileptonic Λ_c^+ decay[J]. Phys. Rev. D, 2023, 107(5):052005.
- [49] Luke M E, Manohar A V. Reparametrization invariance constraints on heavy particle effective field theories[J]. Phys. Lett. B, 1992, 286:348–354.
- [50] Mannel T, Vos K K. Reparametrization Invariance and Partial Re-Summations of the Heavy Quark Expansion[J]. JHEP, 2018, 06:115.
- [51] Uraltsev N. On the chromomagnetic expectation value μ_G^2 and higher power corrections in heavy flavor mesons[J]. Phys. Lett. B, 2002, 545:337–344.
- [52] Falk A F, Neubert M. Second order power corrections in the heavy quark effective theory. 1. Formalism and meson form-factors[J]. Phys. Rev. D, 1993, 47:2965–2981.
- [53] Pak A, Czarnecki A. Mass effects in muon and semileptonic $b \rightarrow c$ decays[J]. Phys. Rev. Lett., 2008, 100:241807.
- [54] de Boer S. Two loop virtual corrections to $b \rightarrow (d,s)\ell^+\ell^-$ and $c \rightarrow u\ell^+\ell^-$ for arbitrary momentum transfer[J]. Eur. Phys. J. C, 2017, 77(11):801.
- [55] Manohar A V, Wise M B. Heavy quark physics[M]. Cambridge university press, 2000.
- [56] Alberti A, Ewerth T, Gambino P, et al. Kinetic operator effects in $\bar{B} \rightarrow X_c l \nu$ at $O(\alpha_s)$ [J]. Nucl. Phys. B, 2013, 870:16–29.
- [57] Capdevila B, Gambino P, Nandi S. Perturbative corrections to power suppressed effects in $\bar{B} \rightarrow X_u l \nu$ [J]. JHEP, 2021, 04:137.
- [58] De Fazio F, Neubert M. $B \rightarrow X(u)$ lepton anti-neutrino lepton decay distributions to order $\alpha(s)$ [J]. JHEP, 1999, 06:017.

- [59] Kamenik J F, Gambino P. Lepton energy moments in semileptonic charm decays[J]. Nucl. Phys. B Proc. Suppl., 2011, 210-211:151–154.
- [60] King D, Lenz A, Rauh T. SU(3) breaking effects in B and D meson lifetimes[J]. JHEP, 2022, 06:134.
- [61] Lenz A, Piscopo M L, Rusov A V. Contribution of the Darwin operator to non-leptonic decays of heavy quarks[J]. JHEP, 2020, 12:199.
- [62] Mannel T, Moreno D, Pivovarov A. Heavy quark expansion for heavy hadron lifetimes: completing the $1/m_b^3$ corrections[J]. JHEP, 2020, 08:089.
- [63] Moreno D. Completing $1/m_b^3$ corrections to non-leptonic bottom-to-up-quark decays[J]. JHEP, 2021, 01:051.
- [64] Kirk M, Lenz A, Rauh T. Dimension-six matrix elements for meson mixing and lifetimes from sum rules[J]. JHEP, 2017, 12:068. [Erratum: JHEP 06, 162 (2020)].
- [65] Wearden S, et al. Statistics for research[J]. 1991.
- [66] Anscombe F J. Graphs in statistical analysis[J]. The american statistician, 1973, 27(1):17–21.
- [67] Melnikov K, Ritbergen T v. The Three loop relation between the MS-bar and the pole quark masses[J]. Phys. Lett. B, 2000, 482:99–108.
- [68] Bigi I I Y, Shifman M A, Uraltsev N G, et al. Sum rules for heavy flavor transitions in the SV limit[J]. Phys. Rev. D, 1995, 52:196–235.
- [69] Gambino P, Giordano P, Ossola G, et al. Inclusive semileptonic B decays and the determination of $|V(ub)|$ [J]. JHEP, 2007, 10:058.
- [70] Gambino P, Melis A, Simula S. Extraction of heavy-quark-expansion parameters from unquenched lattice data on pseudoscalar and vector heavy-light meson masses[J]. Phys. Rev. D, 2017, 96(1):014511.
- [71] Alberti A, Gambino P, Healey K J, et al. Precision Determination of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Element V_{cb} [J]. Phys. Rev. Lett., 2015, 114(6):061802.
- [72] Gambino P, Healey K J, Turczyk S. Taming the higher power corrections in semileptonic B decays[J]. Phys. Lett. B, 2016, 763:60–65.
- [73] Chetyrkin K G, Kuhn J H, Steinhauser M. RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses[J]. Comput. Phys. Commun., 2000, 133:43–65.
- [74] Hoang A H, Ligeti Z, Manohar A V. B decay and the Upsilon mass[J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 82:277–280.
- [75] Bauer M, Stech B, Wirbel M. Exclusive Nonleptonic D ecays of D, D(s), and B Mesons[J]. Z. Phys. C, 1987, 34:103.
- [76] Aoki S, et al. FLAG Review 2019: Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)[J]. Eur. Phys. J. C, 2020, 80(2):113.
- [77] Navas S, et al. Review of particle physics[J]. Phys. Rev. D, 2024, 110(3):030001.

- [78] Herren F, Steinhauser M. Version 3 of RunDec and CRunDec[J]. Comput. Phys. Commun., 2018, 224:333–345.
- [79] Bazavov A, et al. Up-, down-, strange-, charm-, and bottom-quark masses from four-flavor lattice QCD[J]. Phys. Rev. D, 2018, 98(5):054517.
- [80] Neubert M. QCD sum rule calculation of the kinetic energy and chromo interaction of heavy quarks inside mesons[J]. Phys. Lett. B, 1996, 389:727–736.
- [81] Hoang A H, Ligeti Z, Manohar A V. B decays in the epsilon expansion[J]. Phys. Rev. D, 1999, 59:074017.

在学期间的研究成果

一、发表论文

- 1 第一作者 Data determination of HQET parameters in inclusive charm decays[A]. 2025. arXiv: 2502.05901.
- 2 第四作者 Inclusive weak-annihilation decays and lifetimes of beauty-charmed baryons[J/OL]. Phys.Rev.D,2022,106(9):093013. DOI:10.1103/PhysRevD.106.093013

二、参与课题

粲味强子单举衰变的理论研究（12375086）

致 谢

正如第五章所言，这个课题还有很多很多有意思的工作可以继续做下去，但适时停下来去回顾这一路上所经历的风光，往往可以和大家一起走的更远。

感谢先行者们，是我的导师于福升教授、秦溱副教授和本文所引用的各项研究成果，读研究生以来的各位老师，父母家人与肖叶蕾同学共同塑造了这篇论文，也塑造了现在的我。

感谢后来者们，你们未来的每一次引用、借鉴和快速入门这个方向都是这篇学位论文的意义得以拓宽和生命得以延续的关键。

衷心感谢我的导师于福升教授，不会忘记电动力学课程上的第一份作业（你的理想是什么，你为了理想原意付出什么样的努力...）。从那时起，到这份学位论文的完稿，这一路上走的很慢但很踏实。于老师会根据每个人的性格特点来安排适合每个人的课题方向，他具有敏锐的物理直觉，在课题开始时候给我们一张完整但粗糙的蓝图并和我们一起点亮地图上的每一个点。在课题的每个阶段坦诚地告诉我们会遇到什么样的问题以及有哪些解决方案，并给出关键性的建议。很感谢于老师将我们送到中国科学院大学物理学院联合培养，使我们有机会接受研究生基础课程的顶尖水平培养，这使得在具体科研工作中会多一份自信。事实上自信比黄金还重要，这也是我们面对较高难度课题有充分思想准备的前提。**「早熟的人，往往都晚熟」**，这一路上我犯了不少不大不小的错，每次犯错之后于老师总会耐心地从全局角度帮我分析利弊，理清矛盾，使得现在的我少了一丝戾气，多了一份专注自己的内力。在和老师的讨论与相处中，我深切感受到于老师不仅是研究工作中的良师，也是人生道路上的益友。大学四年级期间，于老师帮我联系去华中科技大学物理学院联合培养的机会使我能有机会在新的环境中学习和开拓视野，以及在后来帮我询问博士申请的相关事宜也付出了很多心血。感谢于老师在这些年对我的悉心培养以及付出的心血。

同时，我还想向硕士研究生期间的课题合作者，华中科技大学的秦溱老师致以由衷的谢意。在华中科技大学物理学院两年半的联合培养时光，秦老师无论在生活还是科研上均无微不至的关心和照顾我，给我提供了很多帮助。仍然记得第一次去华科期间与秦老师讨论度规张量的夜晚，事实上，在具体的科研问题上，秦老师也会用启发式的方法引导我们主动地思考问题的答案，并在这个过程中培养我们独立思考的能力。**「想到和得到中间，还有一个做到」**。在实现属于我的科研蓝图过程里，充满了「找错」和「改错」的过程（比如两种运动学变量之间

的之间的交叉检验等等), 秦老师会在这个过程中介绍“二分法”, 使得问题的范围不断缩小, 并最终实现“改错”的目的。我在此后的科研工作中也不断的运用这个方法并和合作者一起找到这样那样的「错误」。「无知并不可怕, 可怕的是无知但不自知」, 每次在科技楼北 515 和秦老师讨论课题, 我会坦诚地讨论自己所不清楚的地方, 事实上有很多非常幼稚的问题和想法, 但秦老师每次总会耐心地引导我去得到正确的答案。去年十二月底开始, 在兰州大学肖栋老师帮助下, 我们在数据处理和唯象学分析方面不断取得突破性进展; 此外在山东大学陈龙老师和北京大学马滢青老师的帮助下, 我们的理论公式也囊括了两圈图水平的贡献。基于上述的进展, 我们趁热打铁, 秦老师和我一起工作至除夕夜的前一天并在正月初二继续工作至文章完成。很感谢秦老师在这段攻坚阶段里充分的支持和鼓励, 这段并肩作战的经历在未来的记忆里将是我珍贵的回忆之一(同时也为耽误秦老师的假期感到非常内疚)。

衷心感谢一路上帮助过我的同门和朋友们, 我深知仅凭一己之力无法走到现在, 每当遇到拿捏不动的问题时总会去叨扰大家。

感谢建鹏师兄在进组考核阶段给予我的帮助和支持, 使得我可以快速上手相关的工作; 感谢国贺师兄和李东浩师叔对本文工作所做的先驱性努力和尝试, 此外在国贺师兄的手把手的帮助下我深度参与到 $\Xi_{bc} \rightarrow X_{cs}$ 衰变道的计算并发表了职业生涯中第一篇参与的工作; 感谢宋雯捷师姐在考研准备、雅思考试准备对我毫无保留地分享她的经验, 此外, 和雯捷师姐合作过程中, 本文的工作的理论部分取得了很多突破性进展(量纲三算符的单圈修正与量纲五算符的单圈修正), 她是一位很棒的合作者! 感谢武汉大学的唐迎澳同学在实验数据处理部分的讨论, 感谢博楠师兄、胤发师兄、纪新、郑勇在解析积分的数值检验过程中的畅所欲言的讨论和交流。与课题合作者之间的交流讨论, 让我逐渐清楚合作者应该是什么样的以及不应该是怎样的。

感谢中国科学院高能物理研究所的吕才典研究员, 三年前作为本科毕业生的我得以邀请吕老师在研究小组内进行学术报告, 使得我得以一窥重味物理的奥秘并激励我在这个领域内做出自己的贡献。感谢吕老师课题组的鲁隆舜、韩雪莹、王进、白颢阳同学, 和你们毫无保留的交流使得我在重味物理的研究上有了更全面的认识。感谢南开大学的王玉明教授, 2021 年青岛 QCD 研讨会上的报告使得我第一次感受到重味物理高精度计算的严谨风格, 「我们学习一个东西, 算出一个值, 目的是为了完全理解它以至于 prompte 它」, 学习单举衰变相关理论的过程中逐渐理解这句话的意义。感谢上海交通大学王伟教授关于粲夸克质量方案的讨论, 这也是我们在三种粲夸克质量方案下进行全局拟合的动机。感谢意大利帕多瓦大学的 Matteo Fael 教授关于重味强子半轻单举衰变差异的答疑解惑

以及德国锡根大学的 Alexander Lenz 教授对本文工作的高度评价。

感谢郑州大学的云鹤师姐和文韬师兄、好朋友杜昌浩、岳聪聪、李旺生、宁佳豪、陆锦成、南京师范大学的王烨凡老师、南开大学的于汇鑫师兄、香港中文大学（深圳）的姬尧和王星老师，在人生重大方向选择的关键时刻，我们之间坦诚并毫无保留地分享各自的想法和经历使得我在选择上有了更清晰的方向。

感谢兰州大学核学院理论组的各位师兄师弟师姐在生活和科研上的照顾和帮助，感谢组内的吴善进老师、刘明珠老师和徐吉老师、王迪、蒋华玉、丁剑南、黄克胜、汪建鹏、熊傲昇、杨雷师兄和贾彩萍师姐以及韩佳杰和李东浩师叔、余纪新、郑勇、胡舒曼、段铸钉和赵占山同学、冯天亮、裘璟靓和黄啸师弟。每次讨论会快速的将问题理清楚并给出相关的建议，生活上幽默风趣，丰富多彩的课余活动使得组内氛围轻松愉悦。感谢实验组的肖栋老师和李培荣老师、王泓鉴、彭云翊、王英豪、杜少旭和牛祺乐师兄和刘英师姐，在与各位的讨论中学习到了很多实验的知识，补充了我在实验方面的欠缺并使得本文工作得以顺利进行。

感谢华中科技大学物理学院基础物理研究所的各位老师同学、感谢秦溱老师课题组内的国贺、胤发师兄和雯捷师姐、惠强以及海龙、佳元和弘锐师弟以及即将进组的李娜同学，大家对于学术都有着同样的热爱，无论是地铁上还是饭桌上，我们都可以毫无保留地分享和交流一些物理的理解和想法。

正如士兵突击电视剧结尾袁朗对成才所言，“你们知道，我和你们一样大的时候，最像你们三个中谁吗？是你，成才。比吴哲更专心，比许三多更知道自己想要的是什么，你的路还很长，成才，比许三多要长的多，同时，你的迷茫要比他多得多。如果这是你的路，你愿意来老 A 吗？”关山难越，我非失路之人，踏上今后的科研之路，必将义无反顾。

期待博士期间能够进一步提升自己的科研能力，之后与大家一起，做更加有趣且激动人心的工作！

最后，感谢肖叶蕾同学始终如一的包容与理解，让我在无数个熬夜的夜晚仍能保持乐观。

献给我的父母
和所有关心我的人

2025 年 5 月
于华中科技大学